

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

51e jaargang
1975/1976
no 10
juni/juli

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 25,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 28,50. Een kollectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement *f* 16,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.
Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.
Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,— (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.
Tarieven: $^1/_1$ pag. *f* 250,—, $^1/_2$ pag. *f* 135,— en $^1/_4$ pag. *f* 75,—.

LEERBOEK-ANALYSE.

DRS. H. G. B. BROEKMAN
Utrecht

1. Inleiding

Bij het bestuderen van het huidige meetkunde onderwijs kan men de zaak op verschillende manieren benaderen.
Zo kan men bijvoorbeeld
a) nagaan wat een leerling aan leerstof gepresenteerd wordt door een leerboek,
b) nagaan wat een leerling voorgezet krijgt door de combinatie leraar - leerboek,
c) nagaan wat er globaal genomen aan meetkunde gedaan wordt in het voortgezet onderwijs in het algemeen.
Bij een keuze van (c) is het gevaar niet denkbeeldig dat de verschillen tussen de diverse leerboeken en de verschillende interpretaties van leerkrachten door een te globale beschouwing niet tot uitdrukking komen.
Bij een keuze van (b) zijn de hiervoor genoemde interpretaties van individuele leraren erg belangrijk. We kennen echter deze interpretaties van individuele leraren van de diverse boeken nauwelijks en nog minder de motiveringen die tot die interpretaties leiden.
Bij een keuze van (a) heeft men de mogelijkheid om afstand te nemen van verschillen in interpretaties. Men kan echter door de bestudering van één leerboek geen algemene uitspraken doen over hèt meetkunde ›nderwijs.
Toch heb ik gekozen voor (a), omdat dit een aanpak is die veelal overeenkomt met die van een leraar die met een nieuw boek gaat werken. Deze zal immers, vóór hij tot het voorbereiden van een les (of serie van lessen) kan overgaan, een duidelijk beeld moeten hebben van inhoud, opbouw, samenhangen, volgordes etc. van het leerboek.
De navolgende wijze van analyseren kan daarvoor goed worden gebruikt, zoals reeds eerder gebleken is bij herhaalde toepassingen bij de leraarsopleiding aan de R.U. te Utrecht;
(A) Stel een globaal overzicht samen van de inhoud; (B) Maak een meer gedetailleerde lijst van de inhoud, waarin de leerstofkeuze en de grove ordening van de leerstof tot uitdrukking komen en (C) Ga na in hoeverre de keuze van leerstof in overeenstemming is met een aantal zo objectief mogelijke criteria.*
In dit artikel wil ik proberen aan de hand van een voorbeeld (Sigma deel 1 en deel 2hv) deze procedure duidelijk te maken.**

* Sluit een bepaald stuk leerstof aan bij datgene dat de leerling al kent en kan, bereidt het voor op latere leerstof etc.
** Op het moment dat ik dit artikel schreef was ik niet in het bezit van de docentenhandleidingen, zodat ik de vele waardevolle aanwijzingen die daarin staan niet mee in beschouwing heb kunnen nemen. Dat hoeft m.i. geen bezwaar te zijn, aangezien het om een voorbeeld van een leerboekanalyse gaat. Mocht ik hierdoor – ongewild – de auteurs van het boek te kort doen, dan spijt mij dat.

Daarna wil ik kort iets zeggen over de keuze van de door mij hierbij gebruikte indeling van de leerstof, om tot slot te eindigen met enkele overpeinzingen over het meetkunde onderwijs n.a.v. het bestudeerde leerboek en een aantal veel gehoorde opmerkingen.

2. Verduidelijking van de procedure aan de hand van Sigma, deel 1 en deel 2hv

A. Een globaal overzicht

Bij het samenstellen van een globaal overzicht van de leerstof zou men gebruik kunnen maken van de inhoudsopgave zoals deze in vrijwel ieder leerboek te vinden is. Hierbij doet zich echter direct een tweetal problemen voor:

1e In de inhoudsopgave staan slechts onderwerpen genoemd, niet echter alle leerstof in de betekenis die ik er graag aan zou hechten, nl. 'al datgene wat we de leerlingen willen leren'. Dit blijkt onder meer uit het feit dat zaken als 'het tekenen', 'het bewijzen' etc. nergens genoemd staan.

2e Bij de huidige aanpak van het wiskundeonderwijs wordt er naar gestreefd een al te rigoreuze scheiding van algebra en meetkunde te vermijden. Dat betekent dat men zich niet zonder meer kan beperken tot de meetkunde.

Ad 1e en 2e Het is voor ons doel voldoende als we de algebraïsche zaken alleen vermelden voorzover ze relevant zijn voor de meetkunde. De leerstof, die wel essentieel is maar niet onder het hoofd 'inhoud' valt kan als kanttekening bij de verdere detaillering vermeld worden.
Bij het voorbereiden van lessen kunnen deze onderdelen pas echt duidelijk naar voren komen.

Globaal overzicht van de meetkunde leerstof in Sigma deel 1 en deel 2 hv

Opm. Aangezien het niet de bedoeling is een verslag van een analyse te geven, maar een voorbeeld, zal slechts een gedeelte hier afgedrukt worden.

DEEL 1

			Kanttekeningen
6.	*Afbeeldingen – Spiegelingen*		
6.1	Afbeeldingen in de algebra	127	definitie, naamgevingen, notaties
6.2	Vraagstukken	130	f-beelden berekenen, originelen berekenen
6.3	Spiegeling van roosterpunten	132	naamgevingen
6.4	Vraagstukken	133	voorbereidingen op 6.5
6.5	Spiegeling van het vlak – Beeld van figuren	135	spiegelen van lijn, lijnstuk en hoek. Eigensch. voornamelijk uit de tekeningen. Notatie $S_a(p)$
6.6	Vraagstukken	137	veel tekenen. *Begin van 'waarom' vragen*
6.7	Herhaling	140	in de vorm van vragen en vraagstukken
7.	*Toepassingen van spiegeling*		
7.1	Symmetrie	143	definitie via vierkant
7.2	Vraagstukken	144	tekenen
7.3	Symmetrieassen van een cirkel	145	
7.4	Vraagstukken	146	plaatje 'lezen'; tevens enkele 'waarom' vragen
7.5	Vlieger	147	Symmetriedef. + 4 eig. Def. middelloodlijn

			Kanttekeningen
2.12	Vraagstukken	88	bewijzen met behulp van de congruentie-gevallen
2.13	Herhaling	90	vragen, veel tekenen
3.	*Verzamelingen*		
3.3	Open beweringen	100–102	zie ook deel 1, pag. 212 e.v.
3.5	De tekens ∧ en ∨	104–107	eerste gebruik van Venn. diagram na pag. 23 deel 1
3.7	Enige verzamelingen in de meetkunde	109	cirkel, middelloodlijn, middelloodlijnen in driehoek door één punt
3.8	Vraagstukken	114	o.a. twee 'theorie' opgaven + bewijs
3.9	Nog enige verzamelingen in de meetkunde	116	bissectrice, cirkelomtrek. Bissectrices in driehoek door één punt (zie ook pag. 96, deel 1)
3.10	Vraagstukken	123	veel tekenen
3.11	Herhaling	125	vraagstukken alg. + meetkunde
4.	*Vergelijkingen*	130–153	

Bij het doornemen van het globale overzicht + kanttekeningen (het gehele overzicht, dus niet alleen het hier afgedrukte deel) zijn er al direkt een aantal zaken die mij opvallen en waarmee ik als leraar-gebruiker rekening zou houden.

1e Het 'doen' van de leerlingen volgt vrijwel altijd op het 'voordoen' door het boek. De theorie komt vrijwel in alle gevallen voort uit de bestudering van een volledig uitgewerkt voorbeeld; vrijwel nooit uit de bestudering door de leerlingen van door hen zelf gemaakte opgaven. (Een uitzondering kunnen we vinden in §6.4 en §6.5, deel 1). Nergens wordt gestart met het maken – door de leerlingen – van opgaven of het aanpakken van problemen, om van daaruit te komen tot de ontwikkeling van nieuwe begrippen etc.

2e Het tekenen neemt in de vraagstukken een grote plaats in. Er wordt in het boek vrijwel niet verteld hoe de leerlingen dat moeten doen. Het 'Construeren' met passer en liniaal komt in deze delen niet voor (Staat ook niet in het Leerplan).

3e In deel 1, hoofdstuk 6, wordt via waarom-vragen een eerste stap gezet in de richting van redeneren en formeel bewijzen. Behalve via een voorbeeld in §7.10 (deel 1) wordt de leerlingen nergens geleerd hoe ze moeten bewijzen (en bewijzen noteren). Het is beslist niet duidelijk wanneer de leerlingen geen genoegen meer mogen nemen met het uit de figuur aflezen van eigenschappen etc. (zie b.v. deel 1 §7.4 en §7.8). Deze onduidelijkheid wordt versterkt bij translaties (deel 1 §9.2), puntspiegeling (deel 1 §12.2), rotatie (deel 2 §2.4) door zinnen als 'zonder bewijs nemen we aan ......'.

4e De afbeeldingen worden gebruikt voor de definitie van vlieger en ruit; niet voor de definities van gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, parallellogram, rechthoek en vierkant.

5e Een aantal begrippen wordt niet gedefinieerd, maar duidelijk gemaakt m.b.v. een voorbeeld dat kennelijk bedoeld is om de leerlingen tot abstractie* te brengen. Dit geldt o.a. voor: zijde, lijnstuk, diagonaal, hoek, hoekpunt, overstaande hoeken etc. De begrippen spiegeling, translatie, puntspiegeling en rotatie worden evenzo via een voorbeeld duidelijk gemaakt (b.v. deel 1, pag. 132. 'We zeggen nu, dat we punt *A* gespiegeld hebben in *l*'). Hoe de leerlingen de afbeeldingen moeten uitvoeren wordt niet expliciet vermeld (zie ook opm. 1e).
6e Bij de eerste introductie van een nieuw onderwerp wordt vrijwel steeds begonnen met het geven van een lange lijst van namen en nieuwe begrippen.
7e Bij het bestuderen van figuren wordt vaak (niet consequent) gebruik gemaakt van de afbeeldingen (zie b.v. deel 1, pag. 187 e.v.). In deel 2 steeds minder (veel via congruentie en verzamelingen).

B. Verdere detaillering

Bij het opstellen van een meer gedetailleerd overzicht van de inhoud van een onderwerp in een leerboek – ik zal dat gemakshalve verder de lange lijn noemen – zullen we meer details willen opnemen dan in het globale overzicht, maar anderzijds er voor willen zorgen dat het overzicht niet verloren gaat.
Omdat ik dat overzicht juist wil vergroten, zal ik gebruik maken van een categorie-indeling die een structurering van de gegevens beoogt te geven. Ik heb vroeger bij het vergelijken van leerboeken gebruik gemaakt van de indeling: morfologie (vormen-leer), afbeedlingen, vectoren. Dat heb ik toen gedaan, omdat dat het materiaal is waaraan de leerlingen hun leeractiviteiten ondernemen. Voor een eerste aanpak van de verdere detaillering van de meetkunde in Sigma is hij geschikt gebleken. Voor een nauwkeuriger analyse is deze indeling echter te grof en daarom zal ik verderop gebruik maken van een meer genuanceerde categorisering.

Opmerkingen vooraf:
1 De leerstof, zoals deze in het boek staat, wordt niet bekritiseerd. Ze wordt alleen in kolommen geplaatst. Ik wil daardoor zichtbaar maken wat bij elkaar hoort en welke overstappen er gemaakt worden.
2 De categorie FIGUREN heb ik in tweeën gedeeld, nl. een subcategorie van de figuren die door de leerlingen als zodanig geclassificeerd worden en een subcategorie van de figuren die door de leerlingen – meestal gevoelsmatig – niet ingedeeld worden bij wat zij figuren noemen.
3 De motivering van de indeling wordt in §3 gegeven.

* Zie Did. van de Wiskunde J. v. Dormolen, Hoofdstuk 4.

Meer gedetailleerd overzicht van de meetkunde in Sigma deel 1 en deel 2 hv.
Opm. Het gaat hier om een voorbeeld, daarom wordt slechts een gedeelte afgedrukt.

	MORFOLOGIE			*AFBEELDINGEN*			
Pagina	Figuren	Bijzondere figuren	Begrippen die met meten te maken hebben	**Afbeeldingen (algemeen)** Bijzondere afbeeldingen van het vlak	Afgebeelde figuren	Stellingen + genoemde eig.	Opmerkingen Rest
deel 1	*hoofdstuk 1*	*Verzamelingen*					
25	**Vierkant** [x]Lijnstuk						geen definitie [x]via voorbeeld
	hoofdstuk 6	*Afbeeldingen – Spiegelingen*					
127				[D]**afbeelding van A naar B (f-beeld, origineel, $f(3) = \ldots$)**			toevoeging (zie deel 2 hv pag. 60) algebraïsche voorbeelden
132				[x]spiegelen in 1 (spiegelbeeld, spiegelas) spiegeling van het hele vlak in $a(S_a)$		$S(A) = A'$ en ook $S(A') = A$	in opgaven eigenschappen (in concrete gevallen)
135					lijn, lijnstuk, lijn die as snijdt, lijn evenw. as	lijn → lijn lijnstuk → lijnstuk (even groot)	geen bewijs geen bewijs
					hoek	hoek → even grote hoek	geen bewijs
137							in opgaven 'waarom' vragen
	hoofdstuk 7	*Toepassingen van spiegeling*					
144	symmetrieas					in opg.: vierkant heeft vier symm. assen	
146					symm. assen cirkel		
		[D]Vlieger tophoek, top				4 eigensch.	
148	[D]middelloodlijn						
		[D]ruit [D]vierkant				4 eigensch.	[D]een vierkant is een ruit met een rechte hoek. In opg. veel waarom vragen

deel 2hv	*hoofdstuk 2 Afbeeldingen in de meetkunde*			
60		**afbeelding van A naar B**		voorschrift (zie deel 1 pag. 127!)
82/86	congruente driehoeken	congruente driehoeken	HZH; ZHH; ZZZ; ZHZ; ZZH 90°	+ bewijzen
88 ev				veel 'morfologische' opgaven
	hoofdstuk 3 Verzamelingen			
107			in vb over $\wedge$: parm. kan vierkant zijn	
109(1)	verz. van de punten op gelijke afstand (1) van een gegeven			(1)/(4) + bewijs (bewijs met twee delen!)
110(2)	punt (2), van twee evenwijdige lijnen (3),		de middelloodlijnen van de zijden van een driehoek gaan door één punt	+ bewijs (zie deel 1 pag. 96)
116(3)	van twee elkaar snijdende lijnen			
121(4)	(4) de verz. punten P met $\angle APB = 90°$, waarin A....			
			de bissectrices van de hoeken van een driehoek gaan door één punt	+ bewijs (zie deel 1 pag. 96)
	hoofdstuk 5 Reële getallen			
154			Pythagoras	gebruikmakend van eigensch. van oppervl.

Bij het doornemen van dit meer gedetailleerde overzicht, waarvan hiervoor een gedeelte is afgedrukt, zijn er opnieuw punten die opvallen:

(1) Begrippen worden vastgelegd
  a met behulp van voorbeelden (b.v. driehoek deel 1 pag. 86; vierhoek deel 1 pag. 97)
  b door middel van een definitie, waarbij gebruik gemaakt wordt van:
    b1 morfologie (b.v. middelloodlijn deel 1 pag. 148; vierkant deel 1 pag. 152)
    b2 verzamelingen (b.v. cirkel deel 1 pag. 100)
    b3 afbeeldingen/symmetrie (b.v. ruit deel 1 pag. 151).

(2) De definities van afbeelding in deel 1 (pag. 127) en deel 2 (pag. 60) zijn verschillend. In deel 1 is het de toevoeging (volgens een bepaald voorschrift), in deel 2 is het een voorschrift (dat aan ieder element van A een element van B toevoegt).

(3) Uit deel 2 pag. 214/216 blijkt dat de oppervlakte beschouwd wordt als een afbeelding van een bepaald soort figuren naar de reële getallen. Deze afbeelding is vastgelegd door een drietal regels (eenheid; oppervlakte van de som van oppervlakken; oppervlakte van congruente figuren). Dit afbeeldingskarakter komt echter niet expliciet aan de orde.

(4) Het verschil tussen hypothesen, axioma's en stellingen komt niet expliciet naar voren. Wel komt een aantal keren de zinsnede voor 'Zonder bewijs nemen we nu aan .....' (b.v. deel 2 pag. 67).

(5) Het verschil tussen eigenschap en kenmerk komt niet naar voren.

(6) In deel 2 komen diverse bewijzen vóór van reeds bekende – uit de figuur afgelezen – eigenschappen, stellingen etc. De motivering van het alsnog bewijzen ontbreekt. b.v. deel 1 pag. 96 en deel 2 pag. 121. De bissectrices van de hoeken van een driehoek gaan door één punt.

(7) Tot deel 2 pag. 111 komen alleen bewijzen voor van nodige voorwaarden (b.v. deel 2 pag. 88. Gegeven is een driehoek ABC met $AC = BC$. Bewijs dat de bissectrice AD even lang is als bissectrice BE).
Op pag. 111 deel 2 staat voor het eerst een bewijs van zowel nodige als voldoende voorwaarden (De verzameling van de punten die gelijke afstand tot twee gegeven punten hebben).

(8) In het boek is geen expliciete ordening van de vierhoeken; niet morfologisch (wel aanzet op pag. 187–191 deel 1) en niet via lijnsymmetrie resp. puntsymmetrie.

(9) Er zijn diverse koppelingen tussen de categoriën Morfologie en Afbeeldingen. Daar bedoel ik mee dat men bij het bestuderen van figuren gebruik maakt van afbeeldingen en bij het bestuderen van afbeeldingen van morfologische eigenschappen van figuren (zie b.v. de bestudering van parallellogram, ruit, rechthoek en vierkant).
Deze koppelingen worden niet expliciet gemaakt.

C. Toetsing van de leerstofkeuze aan een aantal criteria.
Als criteria voor de keuze van leerstof gebruik ik die, welke reeds eerder door J. v. Dormolen beschreven zijn:*
mathematische correctheid, voorbereiding op latere uitbreiding, aansluiting bij de begintoestand en overeenstemming met de doelstellingen.
Hierbij dienen twee kanttekeningen geplaatst te worden:
1e Niet alle leerstof voldoet aan alle vier criteria.
De behandeling van de groepsaxioma's bijvoorbeeld is wel in overeenstemming met het doel leerlingen met structuren in de wiskunde vertrouwd te maken, maar men zal dat in de lagere klassen nalaten omdat een dergelijke behandeling niet goed aansluit bij de begintoestand van de leerlingen.
Soms behandelt men een onderwerp op een bepaald moment omdat het voorbereidt op de behandeling van andere leerstof en niet omdat er op dat moment zulke verstandige lange termijn doelen voor te bedenken zijn.
2e J. v. Dormolen schrijft: 'De criteria zijn niet in de eerste plaats bedoeld voor leerplanontwerpers en schoolboekenschrijvers, maar vooral voor leraren die gebruik maken van een goed leerboek, dat geschreven is op basis van een doordacht leerplan.
Zij moeten in staat zijn in de keuze van de onderwerpen de gedachten en de argumenten van de auteurs te herkennen en te beoordelen.
Wie begrijpt wat de schrijvers hebben gewild, is des te beter in staat goed onderwijs te geven'.
3e De toetsing van de leerstofkeuze aan de criteria is de laatste fase die vooraf gaat aan het voorbereiden van een les (serie van lessen). Sterker dan bij de voorgaande fasen zal hierbij de persoonlijke interpretatie van de leraar een rol spelen, omdat hier de vraag naar voren komt of déze leerstof, op déze wijze gepresenteerd, aan zijn leerlingen onderwijsbaar is.

Toetsing van de leerstofkeuze in Sigma deel 1 en deel 2 hv aan de criteria voor leerstofkeuze

Opm. Aangezien het ook hier om een voorbeeld gaat, zal slechts een klein stukje leerstof beschouwd worden. Wel zullen er een aantal persoonlijke interpretaties verwerkt zijn.

Deel 2 hv hoofdstuk 3

Open beweringen: deze leerstof sluit duidelijk aan bij de beginsituatie van de leerlingen, zowel wat betreft hun ontwikkelingsnivo, intuïtieve kennis, als de reeds in deel 1 behandelde leerstof. Het is alleen de vraag of op dit laatste niet een duidelijker beroep gedaan zou moeten worden.
De leerstof is duidelijk in overeenstemming met o.a. het doel de leerlingen vertrouwd te doen worden met structurering in de wiskunde. Jammer blijft het dat dit niet wat duidelijker tot uiting komt.

* Zie J. v. Dormolen: Didactiek van de Wiskunde, hoofdstuk 4.

Aan het criterium van de voorbereiding op latere leerstof is zeker voldaan (volgende hoofdstuk gaat over vergelijkingen).
Deze leerstof is mathematisch correct, zij het niet volledig.
Dat is ook bepaald niet nodig. Zouden we b.v. voor de veranderlijken ook funkties toe willen laten, dan zouden we wel voorbereiden op de toekomst (differentiaalvergelijkingen) maar het criterium van aansluiten bij de beginsituatie met voeten treden.

Verzamelingen van punten: deze leerstof is duidelijk in overeenstemming met o.a. het doel de leerlingen vertrouwd te doen worden met structurering in de meetkunde en het doel leerlingen vertrouwd te doen worden met logische samenhangen (in dit geval bewijzen van nodige en voldoende voorwaarden). Dit laatste zou duidelijker tot uiting kunnen komen door explicieter aan te sluiten bij de beginsituatie (het kunnen leveren van bewijzen van nodige voorwaarden).
De mathematische correctheid en het voorbereiden spreken voor zich. De beschrijving van delen van het vlak m.b.v. verzamelingen zou wat explicieter gemaakt kunnen worden, mede in verband met de voorbereiding op de onderwerpen functies en relaties en hun grafieken.

Deel 1 hoofdstuk 6

Afbeeldingen: dit onderwerp sluit duidelijk aan bij de beginsituatie van de leerling, is mathematisch correct (niet volledig, maar dat hoeft ook niet op dit moment), is in overeenstemming met doelstellingen die verband houden met structurering, nauwkeurig formuleren, berekeningen correct kunnen uitvoeren, etc.
Wat betreft de voorbereiding op latere uitbreiding kom ik in moeilijkheden als ik kijk naar de definitie van afbeelding op pag. 60 van deel 2. De daar gegeven definitie is mathematisch minder correct en wordt niet voorbereid door de afspraak op pag. 127 van deel 1.

Spiegeling van het vlak: dit onderwerp is duidelijk voorbereid door de behandeling van de algebraïsche afbeeldingen. De spiegeling van roosterpunten is kennelijk ook als voorbereiding bedoeld, alleen ..... waar wordt er gebruik van gemaakt? Wel zijn er enkele verwijzingen, maar dan meer in de zin van 'zie je wel, daar was het ook zo'.
De spiegeling van het vlak (en het bestuderen van beelden van figuren) bereidt duidelijk voor op de latere bestudering van de afbeeldingen translatie, puntspiegeling en rotatie. Mogelijkerwijs zelfs op de nadere bestudering van de verzameling van de congruenties.
Het is m.i. jammer dat er bij de volgende afbeeldingen niet zo iets gezegd wordt als 'evenals bij de spiegelingen zullen we hier eens gaan onderzoeken wat de beelden zijn van lijnen, lijnstukken, etc.'.
De spiegeling van het vlak bereidt tevens voor op de nadere bestudering van meetkundige figuren (via symmetrie), alhoewel ook dit nergens expliciet

gemaakt wordt. Tevens wordt van de mogelijkheden die het gebruik van spiegelingen heeft geen consequent gebruik gemaakt.

3. De keuze van de indeling van de leerstof bij de verdere detaillering.

Met meetkundeonderwijs streven we een aantal doelstellingen na waaraan we de volgende aspecten zouden kunnen onderscheiden: theorie, algoritmen, probleem oplossen, logische samenhang, communicatie.*
Deze vijf doelaspecten – die ieder op zich een generalisatie zijn en waarvan we steeds verschillende concretiseringen kunnen tegenkomen – roepen bepaalde leeractiviteiten op. Deze leeractiviteiten worden ondernomen aan bepaald materiaal en dat materiaal heb ik ingedeeld.
Men kan zich hierbij een aantal vragen stellen:
1e Waarom volsta ik niet met een uitgebreide inhoudsopgave?
2e Waarom heb ik het materiaal niet ingedeeld aan de hand van de vijf doelaspecten en/of de leeractiviteiten?

Ad 1e Een inhoudsopgave in hoofdstukken geeft een opsomming van onderwerpen. Een inhoudsopgave in paragrafen geeft een opsomming van onderwerpen, waarbij vaak al duidelijk iets van de aspecten genoemd wordt. Althans het doelaspect (de doelaspecten) die in een bepaalde paragraaf centraal staat (staan).
Bij een dergelijke indeling treedt echter een vermenging op van de doelaspecten (die iets zeggen over activiteiten die ondernomen moeten worden) en het materiaal waarmee we die doelaspecten proberen te bereiken (waaraan de leeractiviteiten ondernomen moeten worden).
Tevens is het gevaar niet denkbeeldig dat de doelaspekten die in een bepaalde paragraaf niet direkt centraal staan, op ongeoorloofde wijze buiten beschouwing blijven. Dit komt o.a. vaak voor t.a.v. de aspecten probleem oplossen en communicatie.

Ad 2e Een bezwaar tegen de door mij gehanteerde leerstofindeling is, dat je er nauwelijks uit kunt halen wat je nu eigenlijk met die concrete zaken doet. Je kunt er eventueel alleen het een en ander uit afleiden, vooral t.a.v. theorie en logische samenhang.
De rest kun je niet uit die lijst halen, hooguit uit de kanttekeningen. Waar in wezen behoefte aan is, is een tweede lijst. Een lijst met de doelaspecten, eventueel met de leeractiviteiten die zij oproepen.
Met zo'n tweede lijst erbij zouden we de mogelijkheid hebben om twee kanten op te werken. Ik wil dat graag toelichten met een voorbeeld.

Voorbeeld:
Je kunt moeilijk zeggen: 'ik wil m'n leerlingen logisch leren denken, wat zal ik daarvoor nu eens voor onderwerp bij de kop pakken'. Je

* Zie voor de betekenis van deze begrippen: J. v. Dormolen, Didactiek van de Wiskunde.

kunt ook moeilijk zeggen: 'ik wil de leerlingen leren wat voor soorten vierhoeken er zijn', want dan vergeet je de verschillende doelaspecten. Het is wel mogelijk de leerstof vierhoeken en de doelaspecten naast elkaar te leggen en bijvoorbeeld te zeggen: 'ik vind het belangrijk dat leerlingen iets over vierhoeken leren, maar wat laat ik ze doen en hoe laat ik ze dat doen'. Ze moeten natuurlijk weten wat een vierhoek is (theorie); de relaties tussen de verschillende soorten vierhoeken kennen (logische samenhang); ze moeten vierhoeken vlot kunnen tekenen (algoritme); ze moeten aan anderen kunnen vertellen wat een vierhoek is (communicatie); etc.

Om een aanpak – zoals die in het voorgaande voorbeeld geschetst is – mogelijk te maken is het nodig een lijst te hebben met leerstof in enge zin, waarin deze leerstof overzichtelijk is weergegeven. Dit is de belangrijkste reden waarom ik de leerstof op de in punt C van §2 beschreven wijze ingedeeld heb.

4. Enkele (persoonlijke) overpeinzingen over het meetkundeonderwijs n.a.v. het bestudeerde leerboek en een aantal veel gehoorde opmerkingen.

Een aantal veel gehoorde opmerkingen luidt:
1e Vroeger (vóór 1968) hadden we in hoofdzaak morfologie, nu afbeeldingen en vectoren.
2e Vroeger kwam meetkunde van de ruimte pas in de bovenbouw, nu al in de brugklas.
3e Vroeger moesten de leerlingen veel redeneren en bewijzen, nu niet meer.
4e Vroeger werkten we veel met de congruentiegevallen van driehoeken (die via constructie te voorschijn kwamen), nu helemaal niet meer.
5e Vroeger stond in de boeken tenminste een goed stuk theorie met daarna oefenopgaven.

Ad 1e Het is duidelijk dat in het bestudeerde leerboek de morfologie beslist niet is verdwenen ten gunste van o.a. afbeeldingen. Wel is het zo dat het systematisch bestuderen van figuren en hun eigenschappen sterk verminderd is en daar waar dit nog wel gebeurt, vaak gebruik gemaakt wordt van afbeeldingen. Het is alleen niet altijd duidelijk – en bepaald niet alleen in Sigma – waar het op een bepaald moment om gaat; om de bestudering van figuren met hun eigenschappen en onderlinge relaties (structurering van het vlak en/of delen van het vlak) of om de bestudering van de afbeeldingen van het vlak op zichzelf. (Het Rijksleerplan geeft hiervoor ook geen eenduidige aanwijzingen).

Ad 2e In het bestudeerde boek komt geen meetkunde van de ruimte voor. In andere boeken hooguit een klein beetje ten behoeve van een verduidelijking, voorbereiding op, en motivatie van een stukje vlakke meetkunde.

Ad 3e Vroeger moesten de leerlingen inderdaad veel formele bewijzen leveren volgens vaste schema's; de stap van sterk intuïtieve redeneringen naar deze formele bewijzen werd in de meeste gevallen wel erg snel gezet.
In het bestudeerde boek komen wel degelijk formele bewijzen voor en er wordt ook een poging ondernomen de leerlingen daar naar toe te leiden (eerst aflezen van eigenschappen van figuren uit de tekening, dan korte redeneringen aan de hand van waarom-vragen, en daarna formele bewijzen; alhoewel de stap van waarom-vragen naar formele bewijzen een m.i. te grote en onduidelijke stap is).
In diverse andere leerboeken ontbreekt het formeel bewijzen geheel; ja soms vrijwel iedere vorm van redenering, zelfs op het allerlaagste nivo. Is meetkunde zonder ordening, structurering nog meetkunde?

Ad 4e De congruentie gevallen van driehoeken komen in een aantal boeken – waaronder Sigma – nog wel naar voren, alleen niet meer via de constructies, maar via afbeeldingen van het vlak op zichzelf. Door het sterk verminderen van de morfologie ten gunste van de afbeeldingen (de gehele meetkunde is trouwens ingekrompen ten gunste van de algebra) is er duidelijk veel minder behoefte aan de congruentiegevallen die op zich wel erg plezierig zijn om te benutten bij het bewijzen; maar als er nu nog maar zo weinig bewijzen zijn, ook in de bovenbouw van h.a.v.o. en v.w.o.?

Ad 5e Vroeger werd inderdaad alles gedegen voorgedaan voordat de leerling zelf aan het werk mocht, ook al waren we er vroeger – net als nu – van overtuigd dat vooral het doen van de leerling van belang is voor zijn leren. Deze overtuiging heeft althans de auteurs van Sigma niet bewogen hun boek anders op te zetten dan een vorige generatie auteurs van meetkunde boeken. Een stuk theorie gevolgd door oefenvraagstukken, die ook hier vaak meer dienen om greep te krijgen op de nieuwe begrippen dan om het werken er mee in te oefenen.
De moeilijkheid is kennelijk dat men er niet in geslaagd is een goed alternatief te vinden, waarbij de leerlingen toch geconfronteerd worden met een behoorlijke opbouw (gekenmerkt door duidelijke stukjes theorie?).
De auteurs van Sigma geven de leerlingen daarom(?) in hun 'aan de leerlingen' o.a. het volgende advies mee:
'Als je een paragraaf doorleest, zul je misschien eerst wel het gevoel hebben dat je niet begrijpt wat er in die paragraaf staat. Probeer dan toch de vraagstukken, die er op volgen te maken. Je zult zien dat het meevalt'.

Verzuchting van een leraar: 'de meetkunde van nu is zo verbrokkeld, ik zie er wel wat lokale ordening in en als ik maar voldoende afstand neem zelfs een aantal grote lijnen. Alleen, als ik al zo'n moeite heb met het ontdekken van de lijnen, hoe moet het dan mijn leerlingen vergaan?'

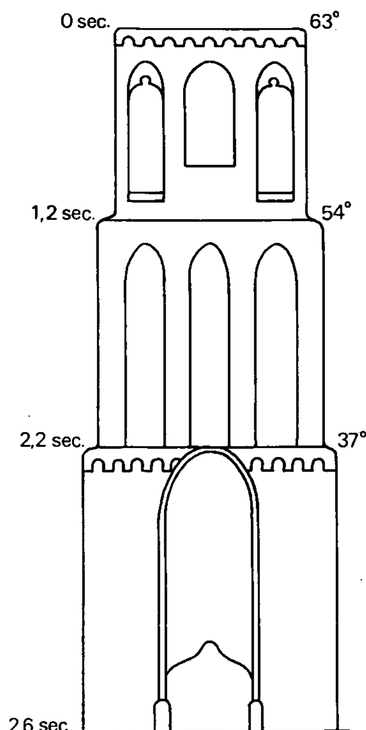
De zwaartekracht te Ransdorp

KEES VAN BAALEN

Durgerdam

Een kleine onderwijskundige idylle

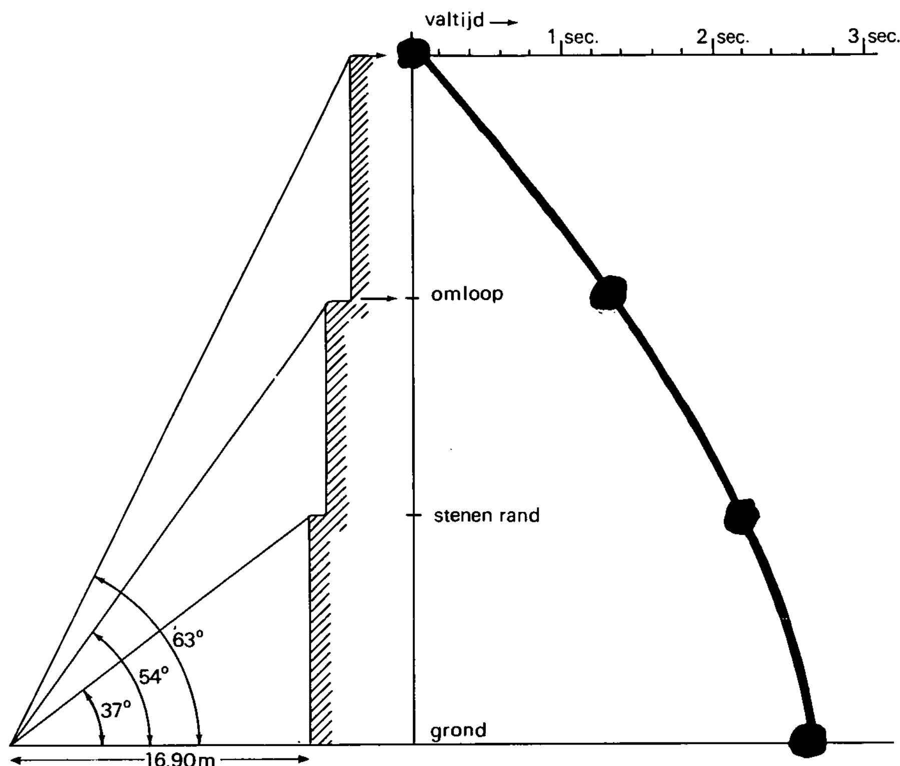
Het streekbusje hobbelde langs de Waterlandse zeedijk met vijf vierdeklassers van een ivo-mavo. Wiskunde hadden ze nauwelijks als geestelijke bagage (zat niet in hun pakket.) Wel hadden ze bij zich: een sextant, een chronometer, een landmeterslint en een wiskundeleraar.
In het doodstille dorp stapten ze uit.
'Goh ik heb honger. Kunnen we wat kopen?'
'Nee jongens eerst aan het werk.'
Bij de koster haalden ze een grote bibelebonse sleutel en de oude stompe toren was een middag van hen. In de gothische gewelven moest de leraar voorkomen dat zij zich vergrepen aan het klokketouw.
'Jongens dan denkt het dorp dat er brand is.'
Hun gestoei stierf weg langs de wenteltrap.
'Hee kijk een nest met eitjes.'
Helemaal boven zagen ze Waterland; weilanden, sloten, diën (lange smalle veenmeren), Holysloot, Monnikendam, Marken, de Zuiderzee, en aan de andere horizon de afzichtelijke stedebouw van Amsterdam Noord.
Een paar hoofden over de trans:
'We zijn boven'
'Gaan jullie meten!'
Op de smalle omloop lager zaten twee figuurtjes elkaar achterna. Die hadden de stopwatch.
'Jongens voorzichtig!'
De hoofden boven riepen:
'Daar gaat ie.'
Een koperen gewichtje suisde omlaag (het kerkplein was verlaten), sprong meters van het plaveisel op en rolde in het gras.
Nicky kwam hijgend de kerk uit:
'1,1'
'Heb je goed gedrukt?'
'Geloof et wel.'
'Nog een keer dan maar!'



Toen kwam hij op 1,2 sec.
Daarna meetten ze de valtijd en tot de hardstenen rand op ongeveer 1/3e van de hoogte en tot beneden.
'Nu de hoogtes!'
Het meetlint werd uitgerold naar het raadhuisje uit 1642.
'Zestienmeternegentig"
Als je daar op de grond zat was de torenvoet op ooghoogte (de kerk staat op een terp). Ze schoten de hoogtes met de sextant. Dat hadden ze meer gedaan. Ze schreven tijden en hoeken naast het silhouet van de toren. Het experimentele gedeelte was klaar. Gelukkig, want de dorpsschool ging uit en de proeven hadden gevaarlijk kunnen worden.
'Wat doen jullie?'
'Wij meten de zwaartekracht.'

De uitwerking
De theoretische fase verliep schoolser. Met een gradenboog werden de hoeken getekend. De snijpunten van de benen met de loodlijn op het andere eind van de basis gaven de coördinaten van de verschillende valwegen. Een tijdas er loodrecht op en de punten corresponderend met de gemeten getallenparen werden ingetekend.
'Kaffer dat punt moet precies bij 1,2. Dat heb ikzelf gemeten.'

Astrid werd de vilstift ontnomen. Zoals zo vaak in de klas werd zij overvleugeld.
De leraar: 'Is het dan waar?'
'Stond op de stopwatch'
'Nou en?'
'Misschien heb je verkeerd gekeken.' 'Of niet goed gehoord toen we loslieten'
'Met de sextant kunnen we een fout gemaakt hebben' 'Staat die toren wel recht?'
'Laten we maar ophouden. Alles is toch fout'
'Nee jongens, metingen zijn altijd een beetje fout. Waar zou het punt ongeveer hebben kunnen liggen?'
Astrid wees een cirkeltje.
'Ja teken het'
Ze kreeg de stift terug en maakte vier vette inktmoppen.
'Wie durft er een kromme door tekenen?'
'Hé je gaat verkeerd. Meer naar binnen.'
'Wat zegt die grafiek?'
'Dat iets zo valt'
'Heeft men daar iets aan? Kan je daarmee rekenen ...?'
'Rekenen doe je met formules.'
'Maar bij een formule hoort ook een grafiek. Bijvoorbeeld w(eg) = 2t(ijd).'
'Kan nooit, die is recht.'
'OK, hoe hoger de macht hoe krommer. Wat zullen we proberen?'
'$w = t^2$'
'Is wel krom, maar lijkt er niet op.'
'We kunnen $1/2t^2$ of $2t^2$ proberen?'
'$1/2t^2$ die wordt smaller.'
Dat deed de wiskundelerarenziel pijn.
'Hé die loopt toch flauwer'
'$2t^2$ dan'
'Ik wed dat het $4t^2$ is'
Deze parabool werd op transparant getekend en over de valgrafiek gelegd.
'Hij past nog niet.'
'Nou dan $5t^2$'
'Ha die is hetzelfde'
'Jullie hebben nu een formule gevonden voor de valweg. Vijfmaal het kwadraat van de valtijd.'
'Is dat echt zo?'
'Echt waar.'
'Joehoei, wij de grote onderzoekers.'
'Het is al bekend. In 1500 of zo zijn een paar moedige wetenschappers op de toren van Pisa geklommen en hebben, net als jullie, dingen laten vallen. Moedig ja, want als toen je uitkomst in strijd was met de leer van de Kerk, liep je risiko van de brandstapel. Ze ontdekten dat lichte en zware metalen bollen even hard vielen. Ze wisten alleen nog niet hoe hard.'
'Een kilometertellertje inbouwen.'
'Wij hebben de afstand en de tijd en dus ...?'

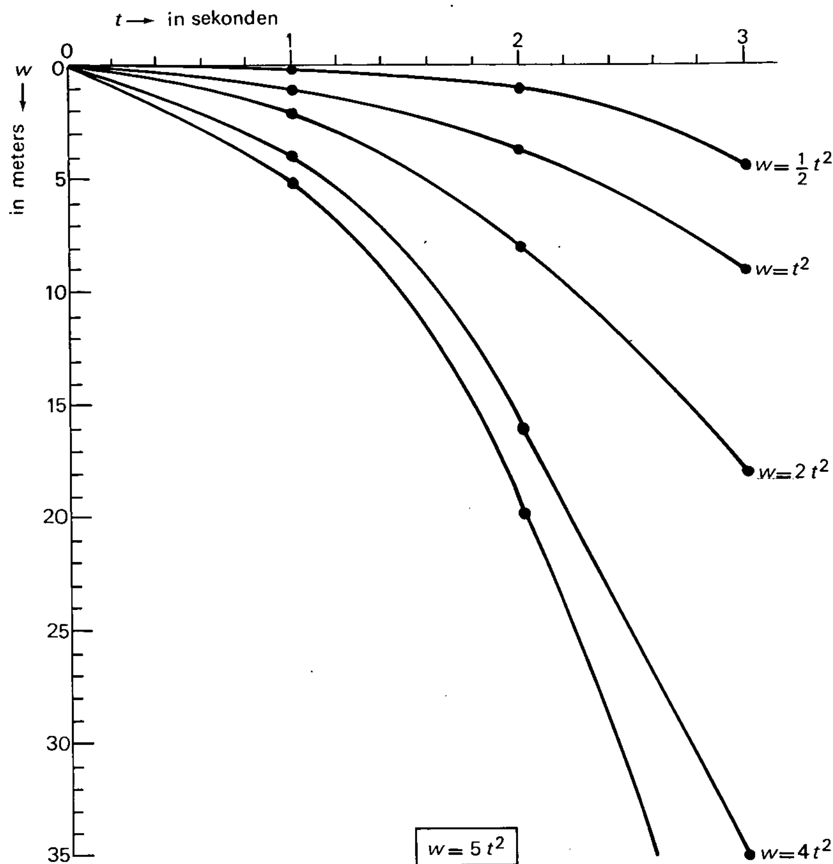


'Delen!'
'Wat op wat?'
'Eh .....'
'Heb je op basisschool niet leren delen?'
'Wel sommen, nooit iets echts.'
'100 km in 2 uur is ...?'
'50 km, o ja, afstand door de tijd.'
'Maar de snelheid verandert steeds.'
'Heel goed. Daarom nemen we een heel klein tijdje (delta t). Hoeveel valt hij dan? Wijs maar aan.'
'Bij delta t hoort dus een afgelegd wegje delta w. Wat is nu de snelheid?'

'$v = \frac{\Delta w}{\Delta t}$'

'Is er in zo'n klein stukje nog wel snelheid?'
'Hij beweegt toch.'
'Je kan zelfs uitrekenen hoe groot die snelheid is. Na t sekonden is hij $5t^2$ gevallen. Na $t+\Delta t$ dus $5(t+\Delta t)^2$. Δw is het verschil. De snelheid is dus

$$v = \frac{5(t+\Delta t)^2 - 5t^2}{\Delta t}$$'



'Wat ingewikkeld!'
'Laten we doorzetten en hopen op de eenvoud van de natuur. Weet iemand nog $(t+\Delta t)^2$? Nee uitcijferen maar. Ja, $t^2+2t\cdot\Delta t+\Delta t^2$. Ingevuld:

$$v=\frac{5t^2+10t\cdot\Delta t+5\Delta t^2-5t^2}{\Delta t}.$$ Het gaat de goede kant op.

$$v=\frac{10t\cdot\Delta t+5\Delta t^2}{\Delta t}.$$ Dat wordt?'

'$10t+5\Delta t^2$'

'Fout. Dezelfde die in alle brugklassen gemaakt wordt.

'$\frac{12 \text{ koeien} + 8 \text{ paarden}}{4}$ is?'

'Nu zie ik het weer, je moet op de hele teller delen.'
'Dus $v = 10t+5\Delta t$'

'Wat is die $5\Delta t$?'
'Heel klein.'
'Vergeet het dus maar. Dan wordt de snelheid'
'$v = 10t$'
'Eenvoudig hè. Na 1 sekonde 10 m/sec. Na 2 sekonden 20 m/sec, enz. Iedere sekonde 10 m/sec groter. Dat noemen ze de versnelling van de zwaartekracht.'
'Echt waar?'
'Ja. Nou ja met heel precieze apparaten wordt het 9,8 en nog wat. Als je nog nauwkeuriger meet blijkt hij ver achter de komma te verschillen. Boven zware gesteenten is hij groter. Bij de polen is hij ook groter omdat de aarde afgeplat is.'
'Zeg en hoe komt het dat die toren stomp is?'
'Hè? ... o ... het streeksprookje zegt dat een groot zeilschip door kapers achtervolgd te dicht bij de dijk door de wind ging en de torenspits er afmaaide. Het kan ook zijn dat ze die toren te hoog wilden hebben. Was toen een statussymbool voor een stad. Maar soms raakte het geld op; oorlog, pest, brand .... Of het veen. Dat ie zo ging verzakken dat ze maar ophielden met bouwen.'

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Evenals vorige jaren worden ook dit jaar bijeenkomsten over de eindexamens wiskunde gehouden.
Voor m.a.v.o. hebben deze bijeenkomsten reeds in mei plaats gevonden.
Voor h.a.v.o. en v.w.o. is er een bijeenkomst op zaterdag 4 september 1976 in het Dr. F. H. de Bruijne-lyceum, Koningsbergerstraat 2 te Utrecht.
Voor h.a.v.o. van 10.30 uur tot ca. 12.30 uur.
Voor v.w.o. van 13.30 uur tot ca. 16.00 uur.
Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren nodigt al haar leden en overige belangstellenden voor deze bespreking uit.

Studentenleden
Het bestuur van de Ned. Ver. v. Wiskundeleraren heeft besloten studenten als tijdelijk lid tegen gereduceerde contributie toe te laten. Voor het komende cursusjaar 1976–1977 bedraagt deze *f* 21,–. Zij moeten zich bij de penningmeester opgeven onder vermelding van het instituut, de universiteit of hogeschool waar zij zijn ingeschreven. Als zij hun studentenlidmaatschap niet verlengen vervalt het automatisch aan het eind van cursusjaar.

Wiskunde Olympiade, eerste ronde 1976
Na opvragen van het werk van deelnemers en controle ervan, is besloten 54 deelnemers met 22 punten of meer uit te nodigen voor de tweede ronde, die op 30 augustus 1976 in Utrecht gehouden zal worden.
Aan de eerste ronde deden ruim 180 scholen met ca. 1800 leerlingen deel.

Continuïteit en limieten

P. G. J. VREDENDUIN

Doorwerth

Bij het werken in de nomenclatuurcommissie zijn we gestuit op het volgende probleem:
is het geoorloofd te schrijven

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

of mogen we alleen maar schrijven

$$\lim_{x \downarrow 0} x \ln x = 0?$$

Het probleem bleek van meer principiële aard te zijn dan op het eerste gezicht leek. Reden waarom de nomenclatuurcommissie meende, dat het niet meer tot haar taak behoorde er dieper op in te gaan. Een nadere analyse ervan is echter stellig de moeite waard.

Het is daarbij noodzakelijk terug te gaan naar de definitie van limiet en naar die van continuïteit. Men kan eerst een definitie geven van een continue afbeelding en daarna de limiet definiëren als continu makende waarde. Men kan ook eerst een limietdefinitie geven en daarna f continu noemen als $\lim_{x \to a} f(x)$ en $f(a)$ aan elkaar gelijk zijn. Beide methoden leiden uiteindelijk tot hetzelfde resultaat. Voor onze analyse is het daarom van geen belang welk van de twee uitgangspunten we kiezen. Ik doe een keus en kies het eerste. Ik herhaal hier de definitie van continuïteit, zoals ik die vroeger in Euclides al eens gegeven heb[1]:
Definitie. Een afbeelding f van V in W is continu in p ($p \in D_f$), als er bij elke omgeving A van $f(p)$ een omgeving B van p bestaat waarvan het f-beeld deel van A is.

Waarna volgt de definitie van limiet als continu makende waarde:
Definitie. Als

f een afbeelding van V in W is

$f^*(x) = f(x)$ voor elke $x \neq p$ ($x \in D_f$)

[1] Euclides *45* (1969–1970) afl. 1, p. 6–16.

$f^*(p) = a$
f^* continu in p is,
dan is

$$\lim_{x \to p} f(x) = a$$

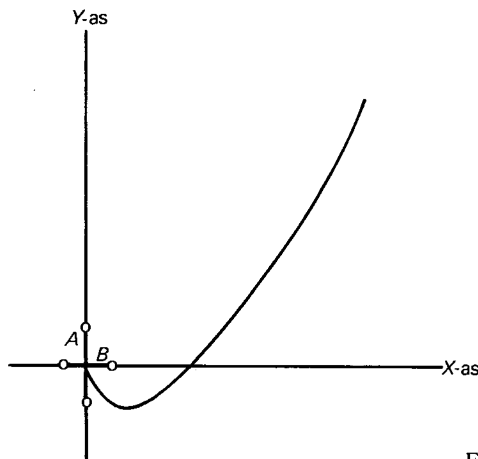


Fig. 1

In fig. 1 is een grafiek getekend van de functie

$$f : x \to x \ln x$$

Door aan deze grafiek het punt (0, 0) toe te voegen, ontstaat de grafiek van de functie f^*, gedefinieerd door

$$f^*(x) = f(x) \text{ voor } x > 0$$
$$f^*(0) = 0$$

Het is duidelijk dat de functie f^* continu is in 0. Kies maar (op de y-as) een omgeving A van 0. Daarbij bestaat (op de x-as) een omgeving B van 0 waarvan het f^*-beeld deel van A is.
Dat de functie f^* slechts in een echt deel van B gedefinieerd is, doet daarbij niets ter zake. Want bij het bepalen van het f^*-beeld van B moeten we de verzameling van de beelden bepalen van de punten van B die een beeld hebben. En van al deze punten liggen de beelden in A.
Hiermee lijkt het pleit in zoverre beslist, dat de schrijfwijze

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

correct is.

Helaas is hiermee het probleem niet opgelost, maar begint nu de moeilijkheid eerst. Is de gegeven continuïteitsdefinitie wel acceptabel? Moeten er nog voorzorgen getroffen worden bij de keuze van het punt p?

Reeds vermeld is, dat p een punt van D_f is. Hetgeen trouwens vanzelf spreekt, want zonder dit zou de definitie zinloos worden. Maar mag p elk punt van D_f zijn? Zou p bijvoorbeeld een geïsoleerd punt van D_f mogen zijn? Laten we het eens proberen. We merken dan dat de functie f in elk geïsoleerd punt van D_f continu is. Nu is een wiskundige per slot voor rekening ook een gewoon mens. Als zodanig is hij emotioneel. Zijn emoties leiden ertoe, dat hij het gek vindt te zeggen dat een functie f in elk geïsoleerd punt van zijn domein continu is. En hij kan als mathemaat zich door zijn emoties in zoverre laten leiden dat hij per definitie verbiedt dat in de continuïteitsdefinitie p een geïsoleerd punt is. Toegegeven (althans voorlopig): p is geen geïsoleerd punt. Dus een verdichtingspunt. Stellen we verder nog eisen? We zouden nog de eis kunnen stellen dat p een speciaal soort verdichtingspunt is, namelijk een verdichtingspunt dat tevens inwendig punt is.
Hier raken we de angel van ons probleem. Stellen we alleen de eis dat p een verdichtingspunt van D_f is, dan is de uitspraak

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

juist. Maar stellen we de eis dat p bovendien een inwendig punt van D_f is, dan kunnen we niet meer zeggen dat

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

Wat zeggen de emoties? Is een functie nog continu in 0 als hij daar plotseling ophoudt gedfinieerd te zijn? Dat lijkt wel iets op continuïteit en breuk tegelijk. Of wil continu zeggen: continu doorgaan? Mijn emoties zeggen: continu doorgaan. Waarmee we $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$ zouden moeten verbannen naar het rijk van de betekenisloze symboolcombinaties.

Toch ben ik te veel mathemaat om me alleen door mijn emoties te laten leiden. Per slot voor rekening is er ook nog zo iets als een gangbare wiskunde. En het is niet gek ook daar eens een kijkje te nemen, voordat we bij een emotionele beslissing blijven steken.
Wat zegt de niet-emotionele wiskunde over continue afbeeldingen?
Ik dacht dat algemeen erkend was de volgende eigenschap:
een afbeelding f van V in W is continu
is gelijkwaardig met
het volledig f-origineel van een open deelverzameling van W is een open deelverzameling van V.
Continu wil hier zeggen: in elk punt van D_f continu. Waarbij ik tegelijk aanteken, dat het gebruik is in de officiële wiskunde indien men spreekt over een afbeelding van V in W onder V hetzelfde te verstaan als onder D_f.

Gewapend met dit officieel-wiskundig inzicht gaan we terug naar onze functies

$$f: x \to x \ln x$$

en de daaruit afgeleide functie f^* gedefinieerd door

$$f^* = f \cup \{(0, 0)\}$$

Bij f is er geen kou aan de lucht; het volledig origineel van een open verzameling is open.
Bij f^* wordt het echter aanmerkelijk kouder. Kies de open verzameling

$$\{x | -e < x < e\}$$

Het volledig origineel is

$$\{x | 0 \leqq x < e\}$$

en deze verzameling is niet open.
Dus zou de functie f wel continu zijn in elk punt van D_f, echter de functie f^* niet continu in elk punt van D_{f^*}. $D_{f^*} \backslash D_f = \{0\}$.
Waarmee toch wel overduidelijk aangetoond schijnt, dat de functie f^* in 0 niet continu is. En dus zou

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

niet juist zijn.

En toch, hoezeer het lijkt dat we de kwestie tot oplossing gebracht hebben, is dit nog niet het geval. In het betoog is een kleine slordigheid geslopen die het geheel op losse schroeven zet. We hebben ons gebaseerd op de ekwivalentie

> een afbeelding f van V $(= D_f)$ in W is continu
> is gelijkwaardig met
> het volledig f-origineel van een open deelverzameling van W is een open deelverzameling van V.

Met deze ekwivalentie gewapend zijn we onze functie f^* te lijf gegaan. En we zijn tot de conclusie gekomen dat er iets aan de continuïteit haperde wegens het niet open zijn van

$$\{x | 0 \leqq x < e\}$$

Nu heeft het alleen maar zin van een open verzameling te spreken, als we erbij vertellen in welke topologische ruimte deze verzameling open is. In het geval van f^* hebben we stilzwijgend aangenomen, dat deze topologische ruimte $\mathbb{R}$ is. En inderdaad, in $\mathbb{R}$ is het interval $[0, e\rangle$ niet open.
In bovenstaande ekwivalentie is echter sprake van twee topologische ruimtes: W en V $(= D_f)$. In het geval van de functie f^* hebben we dus te maken met de twee ruimtes

$$W = \mathbb{R} \text{ en } V = D_{f^*} = \{x \mid 0 \leqq x\}$$

Dat D_{f^*} echt deel is van een uitgebreidere ruimte $\mathbb{R}$ doet niets ter zake. De ruimte $\mathbb{R}$ wordt niet afgebeeld, maar de ruimte D_{f^*}. En als we het in bovenstaande ekwivalentie dus hebben over open volledige originelen, dan zijn daarmee open verzamelingen in D_{f^*} en niet open verzamelingen in $\mathbb{R}$ bedoeld. We moeten dus eerst afspreken wat we verstaan onder een open verzameling in D_{f^*}. We moeten D_{f^*} dan tot een topologische ruimte maken. Het ligt voor de hand daarbij op de volgende manier te werk te gaan: als topologie in D_{f^*} nemen we de door de topologie van $\mathbb{R}$ geïnduceerde relatieve topologie. D.w.z. onder een open verzameling in de topologie van D_{f^*} verstaan we de doorsnede van een verzameling die open in $\mathbb{R}$ is met D_{f^*}.
En nu is ook $[0, e\rangle$ een open deelverzameling van D_{f^*}, omdat het de doorsnede is van $\langle -e, e\rangle$ met D_{f^*}.
Dus toch en nu definitief: f^* is een continue functie en terecht schrijven we

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

We begonnen met te zeggen: de afbeelding f van V in W is continu in p ($p \in D_f$) wil zeggen
bij elke omgeving A van $f(p)$ bestaat een omgeving B van p waarvan het f-beeld deel van A is.
In het geval van de functie f^*, die gedefinieerd was door

$$f^*(x) = \ln x \text{ voor } x > 0 \text{ en } f^*(0) = 0$$

was D_{f^*} ingebed in de ruimere verzameling $\mathbb{R}$. We kunnen nu twee dingen doen:
a. we kunnen voor B een verzameling kiezen die open is in D_{f^*}, dus de doorsnede van een verzameling die open is in $\mathbb{R}$ met D_{f^*};
b. we kunnen voor B een verzameling kiezen die open is in $\mathbb{R}$ en alleen letten op de beelden van die elementen uit B die tot D_{f^*} behoren.

Het is duidelijk dat deze twee werkwijzen op hetzelfde neerkomen. De manier die ik gevolgd heb bij het toepassen van de aanvankelijk gegeven definitie van continuïteit komt overeen met de werkwijze genoemd onder b. De manier die we moeten volgen bij het toepassen van de verscherpte definitie, is de werkwijze sub a. Waarmee de door mij gevolgde werkwijze uit wetenschappelijk oogpunt gerechtvaardigd blijkt.

Op één consequentie moet ik nog wijzen[1]. De gekozen definitie van continuïteit brengt met zich mee, dat een afbeelding in elk geïsoleerd punt continu is. Erg is dit niet. Het is voor een wiskundige heel normaal dat een gekozen definitie met zich meebrengt dat er in randgevallen discrepantie is tussen de intuïtie die aan de definitie ten grondslag ligt en de consequenties van de definitie (denk maar als simpelste voorbeeld hiervan aan de hoekdefinitie die met zich meebrengt dat de gestrekte hoek onder de hoeken valt, hetgeen door Euclides nog

[1]Hierop maakte mij E. H. F. Weygers attent in een scriptie bij zijn studie voor het moB examen.

expliciet uitgesloten werd). Op school praten we daar uiteraard niet over. En als wij er niet over praten, doen de leerlingen dat stellig uit zichzelf ook niet. Blijft nog één vraag over: wat betekent nu

$$\lim_{x \downarrow 0} x \ln x = 0?$$

Linker en rechter limieten worden gebruikt. Welke betekenis moeten we eraan hechten?
Gegeven een functie f waarvan het domein deel van $\mathbb{R}$ is.
Beschouw de functie f_1 gedefinieerd door

$$f_1(x) = f(x) \text{ voor } x \geqq 0 \text{ (en } x \in D_f)$$

Huiselijk gezegd ontstaat f_1 uit f door het gedeelte links van 0 uit te vegen. Nu betekent

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x)$$

per definitie hetzelfde als

$$\lim_{x \to 0} f_1(x)$$

Zodat ook de bewering

$$\lim_{x \downarrow 0} x \ln x = 0$$

juist blijft. Maar hij is niet alleenzaligmakend.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft het voornemen de jaarvergadering te houden op 30 oktober.
Als thema voor deze vergadering is gekozen „Toetsing".
In inleidingen en discussiegroepen kunnen veel aspecten, zoals examenproblematiek en schoolonderzoek, aan de orde komen.
In het oktobernummer van de 48e jaargang (1972/1973) van Euclides staat een artikel over „Schoolonderzoek in mavo-4" van J. P. Aldershof, waarin een alternatieve vorm van schoolonderzoek wordt beschreven.
Het bestuur doet een oproep aan alle leden die ervaring hebben met alternatieve vormen van schoolonderzoek hiervan aan het bestuur kennis te geven opdat hiervan bij de voorbereiding van de jaarvergadering gebruik kan worden gemaakt.

J. Maassen
secretaris

De matrices van spiegeling en rotatie

J. ROELOFSEN

Apeldoorn

In Getal en Ruimte deel 5/6 V3 komt de stelling voor: Elke spiegeling in een lijn door O is voor te stellen door een matrix. Het eropvolgende bewijs deed mij het boek terzijde leggen om te zoeken naar iets korters. Dat volgt hier.
Zij $\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ de richtingsvector van de spiegelas l; zij $P'(p', q')$ het spiegelbeeld van $P(p, q)$ ten opzichte van l, en zij m de lijn door O loodrecht op l, met richtingsvector $\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$.
Omdat de projecties van OP en OP' op l samenvallen, zijn hun inprodukten met de richtingsvector van l gelijk:

$$p\cos\varphi + q\sin\varphi = p'\cos\varphi + q'\sin\varphi \tag{1}$$

Omdat de projecties van OP en OP' op m elkaars tegengestelde zijn, zijn hun inprodukten met de richtingsvector van m ook elkaars tegengestelde:

$$-p\sin\varphi + q\cos\varphi = p'\sin\varphi - q'\cos\varphi \tag{2}$$

Uit (1) en (2) zijn p' en q' op elementaire wijze op te lossen, hetgeen leidt tot de transformatievergelijkingen en de matrix, die ik bekend veronderstel.

Ook de matrix van een rotatie om O kán met behulp van de normaalvector worden afgeleid (maar zonder normaalvector gaat het vlugger!) Laten (p, q) en (p', q') wederom origineel en beeld zijn, ditmaal bij de rotatie om O over een hoek φ.
De hoek tussen OP en OP' is nu (uiteraard!) gelijk aan φ. Van beide is de norm gelijk aan die van OP, dus:

$$(p^2 + q^2)\cos\varphi = pp' + qq' \tag{3}$$

Nu is er natuurlijk nog een vector, die met OP dezelfde hoek maakt, namelijk het beeld van OP bij rotatie over $-\varphi$. We dopen deze vector OP''. Het is echter niet mogelijk, dat OP' en OP'' hoeken met gelijke cosinussen maken met de

normaalvector van OP (welke van de twee doet er niet toe), tenzij $\varphi = 180°$, en dat geval kan buiten beschouwing blijven.
We kiezen als normaalvector van OP het beeld bij rotatie over $+90°$, met eindpunt $(-q, p)$. (Dat dit inderdaad de coördinaten zijn van het beeld van (p, q) bij deze rotatie, kan worden aangetoond met een paar voorbeelden in verschillende kwadranten, of met gebruikmaking van de formules voor $\cos(90°+\alpha)$ en $\sin(90°+\alpha)$).
De hoek van OP' met deze normaalvector is $90°-\varphi$ of $\varphi-90°$, (mod. 360°) wat voor de cosinus gelukkig geen verschil maakt, dus:

$$(p^2+q^2)\sin\varphi = -p'q+pq' \tag{4}$$

Ook hier krijgen we twee lineaire vergelijkingen in p' en q', die op elementaire wijze zijn op te lossen, hetgeen leidt tot het gewenste resultaat.

15de Internationale Ontmoeting van het BCMW

gewijd aan het thema Didactische Situaties
van 24 tot en met 27 augustus 1976 te Namur-Jambes.

Reeds meer dan vijftien jaar delen Belgische en buitenlandse leraars in de inspanningen van het BCMW om het wiskundeonderwijs beter te maken op alle niveaus, 'van kindertuin tot universiteit'.
In de loop van de zestiger jaren lag de klemtoon vooral op de *inhoud* van het onderwijs. Natuurlijk was het belangrijk de school mee te laten genieten van de nieuwe wiskundige verworvenheden die een nieuw licht wierpen op de klassiek aangesneden thema's die daardoor konden worden vereenvoudigd, verlevendigd en gericht langs nieuwe, meer dynamische en dieper ingrijpende wegen. Deze verkwikkende verlichting verschafte potentieel rijke en soepele middelen die toelaten authentiek wiskundig actief te leren zijn.
De bezielers van de hervorming hebben daarom alles in het werk gesteld om de wiskunde te herbouwen tot een gastvrij huis, functioneel ingericht voor kind en adolescent.
Leraars moesten een referentiekader krijgen, een coherent geraamte waarop hun opzoekingen, kennis en nieuwe ervaringen konden worden geënt.
Zo gebeurde dus de aanpak en de onderneming is grotendeels geslaagd, zelfs al moeten we doorgaan, verdiepen, en telkens opnieuw, zonder verpozing noch toegeeflijkheid of dogmatisme, wat reeds gedaan werd, herwerken en herzien.
Maar vandaag worden een groot aantal mensen zich bewust van de diepe mutatie die de school en, meer algemeen, onze wereld in beroering brengt. Ontplooien is belangrijker dan verbruiken, opvoeden dan onderwijzen, worden dan verwerven.
Welke *geest* moet heersen in ons onderwijs?
Hoe concreet werken om stilstaan te naderen tot een toekomst die we al zien dagen?
Dit zijn vragen die ons vandaag worden gesteld en ons meer dan ooit in hun greep hebben.
Dit is dan ongetwijfeld de moeilijke en veeleisende taak die van nu af het overgrote deel van onze gezamenlijke inspanningen zal opslorpen.

Inlichtingen bij BCMW, Albertlaan 224, Brussell.

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA
Delft

XCVIII. *Hoe lang duurt een dag?*

Het woord *dag* heeft in onze taal twee betekenissen. In de ene zin is het synoniem met *etmaal* en het duidt dan een voor onze chronologie belangrijk tijdsverloop aan, te verdelen in vierentwintig uren; deze betekenis heeft het woord in *dinsdag*, *verjaardag* en *schrikkeldag* en als april dertig *dagen* heeft. In de andere zin wordt er het deel van het etmaal mee bedoeld waarop de zon aan de hemel staat; men ontmoet het in: voor den *dag* ermee, een verschil van *dag* en nacht, de langste *dag*, de *dag*eraad. (Bij: zij had haar *dag* niet, zijn *dag* komt nog, en bij de jongste *dag* moet de lezer maar beslissen welke betekenis wordt bedoeld). In het tweede geval duidt het woord een veranderlijk tijdvak aan: in januari *lengen* de dagen.

Voor een wiskundige is de tweede betekenis het meest interessant. Het etmaal is een constante- en constanten zijn alleen belangwekkend als zij toch variabel blijken. Het woord *dag* in de titel is dan ook in de andere zin bedoeld; zijn duur is een *functie*, zowel van (zoals men zegt) *de tijd van het jaar* als van *de plaats op aarde*. Deze functionele afhankelijkheid is het onderwerp van dit opstel.

Wij zullen de astronomie maar eenvoudig houden en enige aanvaardbare benaderingen gebruiken. De aarde zij een bol waarvan het middelpunt A zich eenparig in één jaar beweegt langs een cirkel in het middelpunt M waarvan de zon staat, een puntvormige lichtbron. De afstand MA is zo groot dat de stralen die de aarde treffen evenwijdig zijn. In elke stand wordt de helft van het boloppervlak beschenen; de grens tussen licht en donker is een grote cirkel waarvan het vlak V loodrecht op MA staat. De aarde draait eenparig om een vast met haar verbonden as a; bij de beweging om de zon houdt a steeds dezelfde richting. De constante hoek tussen a en de normal n op het vlak U van de aardbaan wordt met ε aangegeven (*fig. 1*); ε is ongeveer 23°30′.

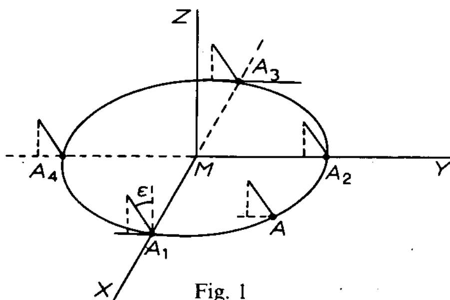


Fig. 1

Tweemaal jaarlijks staat MA loodrecht op a; de aarde bevindt zich dan in een equinox en het vlak V gaat door a. Wij laten het jaar in zo'n stand, zeg in de voorjaarsevening (dus op 21 maart), beginnen. Zij t met $0 \leqq t \leqq 1$ de tijd van het jaar, het deel van het jaar dat verstreken is. Dan heeft A op het tijdstip t langs de ecliptica de boog $\alpha = 2\pi t$ afgelegd $(0 \leqq \alpha \leqq 2\pi)$.
Wij voeren een rechthoekig assenstelsel $MXYZ$ in, met de X-as langs $MA_{1'}$, de Y-as langs MA_2 en de Z-as loodrecht op U. De noordpool van de aarde is N; de eenheidsvector $\bar{e}_1$ langs AN heeft dus de componenten $(0, -\sin\varepsilon, \cos\varepsilon)$ en die van $\bar{e}_2$ langs AM zijn $(-\cos\alpha, -\sin\alpha, 0)$. Daaruit volgt dat voor de hoek δ' tussen $\bar{e}_1$ en $\bar{e}_2$ geldt $\cos\delta' = \sin\varepsilon\sin\alpha$. In het meridiaanvlak W door $\bar{e}_1$ en $\bar{e}_2$ ontstaat de *figuur 2*. Het vlak V van de schaduwgrens snijdt W

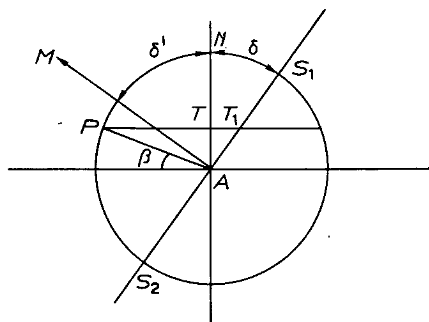


Fig. 2

volgens de lijn door A loodrecht op AM, die de meridiaan snijdt in S_1 en S_2. De hoek $\delta = \angle S_1AN = \frac{1}{2}\pi - \delta'$, waaruit volgt $\sin\delta = \sin\varepsilon\sin\alpha$, zodat $-\varepsilon \leqq \delta \leqq \varepsilon$. Wij beschouwen nu de wenteling van de aarde om de as AN, die één etmaal duurt en voeren een verdere vereenvoudiging in door de verandering die α in die tijd ondergaat te verwaarlozen. Is R de straal van de aarde en P een punt op de geografische breedte $\beta(-\frac{1}{2}\pi < \beta < \frac{1}{2}\pi)$ dan beschrijft P een cirkel met straal $R\cos\beta$. Het vlak van die cirkel snijdt AN in T en AS_1 in T_1. Daarbij is $AT = R\sin\beta$ en $TT_1 = R\sin\beta\tan\delta$. Daar het vlak V en dat van de breedtecirkel beide loodrecht staan op het meridiaanvlak W staat ook hun door T_1 gaande snijlijn loodrecht op W. In het vlak van de breedtecirkel ontstaat *fig. 3*.

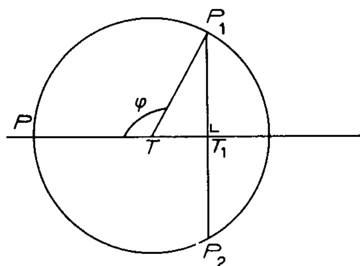


Fig. 3

Ligt T_1 binnen de cirkel dan is de boog P_1PP_2 in het licht en de rechterboog P_1P_2 in het donker. Ligt T_1 rechts van de cirkel dan is deze geheel verlicht; is T_1 links van de cirkel dan is deze geheel in het donker. Ligt T_1 binnen

de cirkel dan is boog $P_1PP_2 = 2\varphi$ waarbij $\cos\varphi = -TT_1/TP_1 = -R\sin\beta \tan\delta/R\cos\beta = -\tan\beta\tan\delta$. Is $TT_1 > R\cos\beta$ of wel $-\tan\beta\tan\delta < -1$ dan gaat de zon niet onder; als $-\tan\beta\tan\delta > 1$ dan komt zij niet op. Wij hebben het volgende resultaat bereikt.

De duur l van een dag, met het etmaal als eenheid, is een functie van de tijd t $(0 \leqq t \leqq 1)$ *en van de geografische breedte* $\beta(-\frac{1}{2}\pi < \beta < \frac{1}{2}\pi)$, *die als volgt wordt bepaald*:

als

$$\sin\delta = \sin\varepsilon\sin 2\pi t \qquad (-\varepsilon \leqq \delta \leqq \varepsilon)$$

en

$$k = -\tan\beta\tan\delta,$$

dan is

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\pi}\arccos k \qquad \textit{als } -1 \leqq k \leqq 1, \\ l &= 1 \qquad \textit{als } k \leqq -1, \\ l &= 0 \qquad \textit{als } k \geqq 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Onder arccos k wordt daarbij de in het eerste of tweede kwadrant gelegen hoek verstaan.

l is een continue functie van t en β. Voorts geldt $l(-\beta, t+\frac{1}{2}) = l(\beta, t)$. Wegens de symmetrie-eigenschappen van l kan men zich bij haar bestudering beperken tot het kwartaal $(0 \leqq t \leqq \frac{1}{4})$ en tot het noordelijk halfrond $(0 \leqq \beta < \frac{1}{2}\pi)$. Men leidt onmiddellijk af: voor $t = 0$ en voor $t = \frac{1}{2}$ is $\delta = 0$, $k = 0$ en dus $l = \frac{1}{2}$; bij de voorjaars- en najaarsevening zijn overal op aarde de dag en de nacht evenlang. Als $\beta = 0$, dan is $k = 0$ en $l = \frac{1}{2}$ voor elke t, aan de evenaar zijn altijd de dag en de nacht evenlang. Op het noordelijk halfrond komt $l = 1$ alleen dan voor als $k \leqq 1$, dus als $\tan\beta\tan\delta \geqq 1$, waaruit volgt $\tan\delta > 0$ en dus $\tan\beta \geqq \cot\delta$; maar daar $-\varepsilon \leqq \delta \leqq \varepsilon$ is dan $\cot\delta \geqq \cot\varepsilon$ en dus $\tan\beta \geqq \cot\varepsilon = \tan(\frac{1}{2}\pi - \varepsilon)$. Etmalen waarop de zon niet ondergaat komen dus alleen voor binnen (of op) de poolcirkel. Een half jaar later komt de zon niet op.

Met behulp van onze formule kan men voor elke datum en voor elke plaats op aarde de duur van de dag bepalen als men over een goniometrische tafel beschikt. De uitkomsten voor onze breedte kunnen geverifieerd worden door directe waarneming of, eenvoudiger, met een zakagenda als deze de tijdstippen van opkomst en ondergang van de zon vermeldt.

Voor andere breedtegraden kan men een *nautical almanac* raadplegen. Bij genoegzame motivatie ligt hiermee voor een team een creatief project ter beschikking. Dan kan tevens blijken in hoeverre ons eenvoudig *astronomisch model* de werkelijkheid weergeeft.

Wij geven enkele numerieke voorbeelden. Hoelang duurt hier te lande de langste dag? Men heeft $\beta = 52°$, $\tan\beta = 1.280$, $t = \frac{1}{4}$, $\sin\delta = \sin\varepsilon$, $\tan\delta = \tan\varepsilon = 0.435$, $k = -1.280 \times 0.435 = -0.557$, $\arccos k = 2.162$ rad., $l = 0.688$ etm., dat is ongeveer $16\frac{1}{2}$ uur. Wanneer gaat voor het binnen de poolcirkel gelegen punt met $\beta = 75°$ de zon niet onder? Dan moet $k \leqq -1$, dus $\tan\beta \tan\delta \geqq 1$, $\delta \geqq 15°$, $\sin\delta \geqq 0.259$ waaruit volgt wegens $\sin\varepsilon = 0.399$, dat $\sin 2\pi t \geqq 0.649 = \sin 40°28'$, zodat $\frac{1}{4} - 0.137 \leqq t \leqq \frac{1}{4} + 0.137$. Gedurende ongeveer 50 etmalen vóór en ook nà 21 juni gaat de zon niet onder.

Om enig algemeen inzicht te krijgen in het verloop van l als functie van t bij constante β bepalen wij $\mathrm{d}l/\mathrm{d}t$. Men heeft (zolang niet $l = 1$ of $l = 0$ is), volgens (1),

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\pi^{-1}(1-k^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = -\tan\beta \cos^{-2}\delta \cdot \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} = 2\pi \sin\varepsilon \cos^{-1}\delta \cos 2\pi t,$$

waaruit volgt

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{2 \sin\varepsilon \sin\beta \cos 2\pi t}{(1-\sin^2\varepsilon \sin^2 2\pi t)(\cos^2\beta - \sin^2\varepsilon \sin^2 2\pi t)^{\frac{1}{2}}}. \tag{2}$$

Voor $t = 0$ wordt dit

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}(0) = 2 \sin\varepsilon \tan\beta, \tag{3}$$

een getal dat monotoon toeneemt bij wassende breedte. Daar $\sin\varepsilon \sim 0.4$ is de toename $0.8 \tan\beta$ etmalen op jaarbasis, dat wil zeggen dat omstreeks 21 maart de 'dagelijkse' toename van de duur van een dag gelijk is aan $0.8\frac{24 \times 60}{365}$ $\tan\beta$ minuten $= 3.2 \tan\beta$ minuten. Dat is op onze breedte ruim 4 min., voor een punt op 45°NB is het 3.2 min., op de poolcirkel 7.4 min. en voor $\beta = 75°$ gelijk aan 11.9 minuten.

Ten aanzien van het verdere verloop van $l(t)$ moeten wij de gevallen $\beta < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$, $\beta = \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ en $\beta > \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ onderscheiden. Ligt P buiten de poolcirkel, dan geldt voor elke t dat $l = \pi^{-1} \arccos k$ en $\mathrm{d}l/\mathrm{d}t$ wordt overal door (2) gegeven; voor $t = \frac{1}{4}$ is $\mathrm{d}l/\mathrm{d}t = 0$, l heeft haar maximale waarde π^{-1} arccos $(-\tan\beta \tan\varepsilon)$. Ligt P op de poolcirkel dan kan (2) worden vereenvoudigd tot

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{2\cos\varepsilon}{1-\sin^2\varepsilon \sin^2 2\pi t}, \tag{4}$$

een met t toenemende functie, die voor $t = \frac{1}{4}$ de waarde $\frac{2}{\cos\varepsilon}$ heeft; l is dan gelijk aan 1.

Ligt P binnen de poolcirkel dan geldt (2) alleen zolang $t < t_1$ waarbij $\sin 2\pi t_1 = \frac{\cos\beta}{\sin\varepsilon} < 1$; l is gelijk aan 1 voor $t_1 \leqq t \leqq \frac{1}{4}$; $\frac{dl}{dt}(t_1) = \infty$.

Door (2) naar t te differentieren krijgen wij, na enig rekenwerk

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = FQ \sin 2\pi t, \tag{5}$$

waarbij

$$F = 4\pi \sin\varepsilon \sin\beta(1-\sin^2\varepsilon \sin^2 2\pi t)^{-2}(\cos^2\beta - \sin^2\varepsilon \sin^2 2\pi t)^{-\frac{3}{2}},$$
$$Q = 2\sin^4\varepsilon \sin^4 2\pi t - \sin^2\varepsilon(\cos^2\beta + 3\sin^2\varepsilon)\sin^2 2\pi t + {}$$
$$+ (2\sin^2\varepsilon\cos^2\beta + \sin^2\varepsilon - \cos^2\beta).$$

Voor $0 \leqq \beta \leqq \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ gelden deze formules voor $0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}$, voor $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon < \beta < \frac{1}{2}\pi$ alleen voor $0 \leqq t < t_1$.

Uit (5) volgt dat voor elke β geldt $\frac{d^2 l}{dt^2}(0) = 0$; de grafiek van $l(t)$ heeft voor $t = 0$ een buigpunt en dus in de omgeving van $t = 0$ een lineair verloop. Hier te lande bedraagt de toename van l per etmaal nog geruime tijd na (en voor) 21 maart de genoemde 4 minuten.

Voor $t > 0$ wordt, daar $F > 0$, het teken van $\frac{d^2 l}{dt^2}$ doordat van $Q(x)$ bepaald, die een kwadratische functie van $x = \sin^2 2\pi t$ is. De discriminant is

$$D = \sin^4\varepsilon(\cos^2\beta - 9\sin^2\varepsilon + 8)(\cos^2\beta - \sin^2\varepsilon); \tag{6}$$

de tweede factor is wegens $\sin\varepsilon \sim 0.4$ voor elke β positief, de laatste is negatief binnen de poolcirkel waaruit volgt dat Q daar positief definiet is. De functie dl/dt is dus aldaar toenemend en de grafiek van l heeft derhalve de in *fig. 4* geschetste vorm. De boog staat loodrecht op het horizontale stuk.

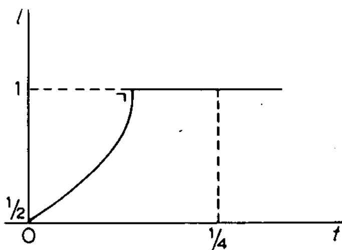


Fig. 4

Door substitutie blijkt

$$\begin{aligned} Q(0) &= 2\sin^2\varepsilon\cos^2\beta + \sin^2\varepsilon - \cos^2\beta, \\ Q(1) &= \cos^2\varepsilon(\sin^2\varepsilon - \cos^2\beta). \end{aligned} \tag{7}$$

Voor $\cos\beta = \sin\varepsilon$ heeft Q, zoals uit (6) en (7) blijkt, twee samenvallende wortels $x = 1$. Voor een punt op de poolcirkel is dus $d^2 l/dt^2$ voor

$0 < t < \frac{1}{4}$ positief; voor $t = 0$ en voor $t = \frac{1}{4}$ heeft de grafiek van $l(t)$ een buigpunt. Zij is geschetst in *fig. 5.*

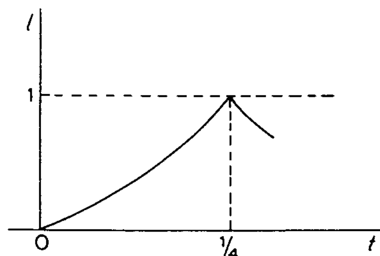


Fig. 5

Voor punten buiten de poolcirkel is $Q(1)$ negatief; $Q(0) = 0$ als $\cos^2 \beta = \frac{\sin^2 \varepsilon}{1 - 2\sin^2 \beta}$, met als antwoord $\beta = \beta_1 = 61°3'$, zodat $Q(0) > 0$ als $\beta_1 < \beta < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ en $Q(0) < 0$ als $\beta < \beta_1$. Voor de gordel tussen de breedtecirkels 61°3′ en 66°30′ heeft Q dus een nulpunt tussen $x = 0$ en $x = 1$. De grafiek van l heeft voor deze zone een buigpunt; $\mathrm{d}l/\mathrm{d}t$ neemt aanvankelijk toe, maar later af en bereikt dan voor $t = \frac{1}{4}$ de waarde 0. Het verloop van l is in *fig.* 6 weergegeven. Met behulp van de *nautical almanac* kan men voor b.v. $\beta = 66°$ verificeren dat dit verschijnsel zich werkelijk voordoet.

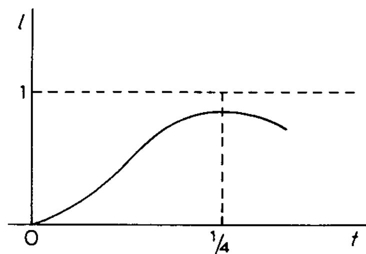


Fig. 6

Voor $\beta < 61°3'$ ten slotte is Q voor $0 \leqq x \leqq 1$ negatief en dus $\mathrm{d}l/\mathrm{d}t$ afnemend. De grafiek (zoals die b.v. op onze breedte geldt) vindt men in *fig. 7.*

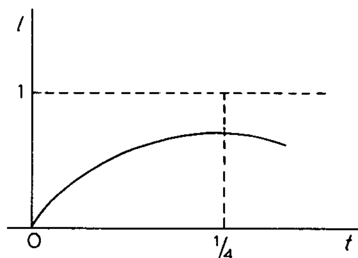


Fig. 7

Boekbespreking

Beiträge zum Mathematikunterricht, twee delen: 1974 en 1975; opv. 167 en 271 blz.; DM 32,80 en 19,–. Hermann Schroedel Verlag, Hannover.

Deze beide congresverslagen rapporteren uitvoerig over de achtste en de negende *Bundestagung für Didaktik der Mathematik*, die in maart 1974 in Berlijn en in maart 1975 in Saarbrücken werden gehouden.
De 'Beiträge' verschijnen sinds 1967. De voordrachten op de congressen zijn zo talrijk en omvangrijk, dat men zich ten aanzien van het Berlijner congres genoodzaakt heeft gezien van de ongeveer 50 lezingen slechts de 19 'Hauptreferate' op te nemen, terwijl van het Saarbrücker congres alleen samenvattingen werden gebundeld, om kosten te besparen in Typoskript. Ter karakterisering van het behandelde geven we uit elk van de bundels een vijftal titels:
Voor Berlijn:
1 Meschkowski, Aufgaben und Grenzen einer Didaktik des mathematischen Unterrichts.
2 Graf, Auswirkungen der Informatik auf den Mathematikunterricht.
3 Handschel, Axiomatische Mengenlehre für Kollegstufe und Studienanfänger.
4 Laugwitz, Unendlich als Rechenzahl?
5 Senft, Gedanken zur Praxis des frühen Mathematikunterrichts.
Voor Saarbrücken:
1 Walter, Was soll heissen 'Einen Beweis verstanden haben'?
2 Maier, Zum Problem der Sprache im Mathematikunterricht.
3 Holland, Strategien zur Bildung geometrischer Begriffe.
4 Kilian, Elektronische Taschenrechner im Unterricht.
5 Steiner, Zum Aufbau des Instituts für Didaktik der Mathematik in Bielefeld.

Gedurende de congresdagen te Saarbrücken werd de '*Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*' opgericht met als algemene doelstelling 'die Förderung der Mathematik als Wissenschaft'. De organisatie staat slechts open voor hen die als docent of als onderzoeker aan een 'Hochschule' de belangen van de didaktiek behartigen of die op grond van hun publicaties voor het lidmaatschap in aanmerking kunnen worden gebracht. Na ballotage. Griesel rapporteert over de totstandkoming van de nieuwe organisatie.

Ten aanzien van de werkwijze van de congressen wijs ik nog op de discussiegroepen die in 1975 te Saarbrücken werden georganiseerd:
1 Gegenwärtiger Stand der Reform des Mathematikunterrichts in der Grundschule.
2 Beurteilung von Mathematikstunden.
3 Leistungsmessung im Mathematikunterricht.
4 Ausbildung von Stufenlehrern für den Mathematikunterricht.
5 Nichtklassische Beziehungen der Mathematik zu anderen Schulfächern.

Uit bovenstaande opsomming moge blijken dat de keuze van de ter discussie gestelde onderwerpen ook de belangstelling zal kunnen wekken van hen wie de ontwikkeling van de wiskundedidaktiek in Nederland ter harte gaat.

Joh. H. Wansink.

Peter Henrici, *Applied and computational complex analysis*, Volume one, £ 13.50, John Wiley & Sons, New York, etc., 1974.

Dit boek is het eerste van een 3-delige reeks die de auteur van plan is te schrijven over theorie en

toepassingen van analytische functies (van één of meer complexe veranderlijken). De opzet van deze reeks verschilt van andere werken over functietheorie door de sterke nadruk die op het algorithmische aspect valt. Vanuit deze opzet wordt de theorie gepresenteerd en komen op natuurlijke wijze toepassingen aan de orde in andere onderdelen van de wiskunde – in het biezonder de numerieke wiskunde – en in de natuurwetenschappen en technische wetenschappen.
Dit eerste deel begint met een algebraïsche behandeling van formele machtreeksen. Hierna volgt in het tweede hoofdstuk een behandeling van de elementaire eigenschappen van analytische functies. De hier gehanteerde definitie van analyticiteit sluit aan bij die van Weierstrass en is dus gebaseerd op machtreeksen. In het derde hoofdstuk komt analytische voortzetting en de numerieke realisering hiervan aan de orde. Complexe integratie met toepassingen – o.a. bij de bepaling van reële oneigenlijke integralen en de sommatie van oneindige reeksen – wordt hierna behandeld. Hoofdstuk 5 handelt over conforme afbeeldingen. Hier komen ook toepassingen aan de orde op technische problemen, o.a. in de electrostatica en in de stromingstheorie voor ideale vloeistoffen. In hoofdstuk 6 behandelt de auteur complexe polynomen en de nulpunten hiervan. Eerst komen stellingen aan de orde die handelen over de ligging van de nulpunten in het complexe vlak. Vervolgens gaat hij in op numerieke methoden om de nulpunten iteratief te benaderen. Het laatste hoofdstuk van het boek is gewijd aan breuksplitsing. Na verschillende algorithmen voor breuksplitsing behandeld te hebben, worden toepassingen – o.a. bij differentievergelijkingen en in de combinatoriek – besproken. Aan het eind van de meeste paragrafen zijn opgaven te vinden. Voorts bevat het werk een aantal 'seminar assignments'.
De voorkennis nodig voor het lezen van dit boek, bestaat ruwweg uit de stof die aan de Nederlandse universiteiten in de eerste 2 studiejaren op het gebied van Analyse en Lineaire Algebra wordt gedoceerd.
Henrici heeft met dit boek weer een bewijs geleverd van zijn grote didactische bekwaamheden: de stof wordt overal op heldere en fraaie manier gepresenteerd – ook daar waar het om meer technische bewijzen gaat.
Tot slot zij vermeld dat dit boek een aantal recente wiskundige resultaten bevat – gedeeltelijk van Henrici zelf afkomstig.

M. N. Spijker

Henri Cartan, *Differentialformen*, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, III + 250 pp.

Het boekje is een vertaling van de overeenkomstige franse uitgave verschenen in de serie Collection Méthodes bij Hermann.
[Voor het geval nog geen recensie van de franse editie is verschenen het volgende:]
Het beoogt de lezer vertrouwd te maken (en niet meer dan dat) met het begrip differentiaalvorm en zijn eenvoudigste eigenschappen, w.o. het lemma van Poincaré. Daarbij wordt uitsluitend de locale theorie behandeld, dwz. differentiaalvormen worden slechts beschouwd op open deelverzamelingen van de R^n, alhoewel definities en bewijzen zo worden gegeven, dat ook het geval van differentiaalvormen op open deelverzamelingen van een Banachruimte wordt meegenomen. Toepassingen van het formalisme van differentiaalvormen in de differentiaalmeetkunde worden in het laatste hoofdstuk aan de orde gesteld. Enigszins los van het eerste en laatste hoofdstuk staat het middelste hoofdstuk over variatierekening.
Een collectie vraagstukken stelt de lezer in staat zich te bekwamen in het werken met differentiaalvormen en tevens zich vertrouwd te maken met 'fait divers' die tot de standaardkennis op dit gebied behoren.
Belangrijke verdienste van het boekje is, behalve de beknoptheid, de heldere en precieze uiteenzetting. In het bijzonder valt naar de mening van de recensent ook te waarderen de gevolgde didactische methode, waarbij voor bepaalde moeilijke stellingen (o.a. Stokes) het bewijs geleverd wordt in een eenvoudig goed overzichtelijk geval van lage dimensie waarbij alle essentiële moeilijkheden van het algemene geval duidelijk aan het licht treden, terwijl het bewijs voor het meer algemene geval schetsmatig wordt aangegeven en vervolgens aan de vlijt van de lezer wordt overgelaten.

W. T. van Est

Passen en Meten, 3. Metingen, door G. Doevendans en vier anderen, wiskunde en rekenen voor LBO/LAVO, *f* 7,50 Wolters-Noordhoff ISBN 9001 697127.

Een boekje, dat velerlei gedachten bij mij oproept. Hoe komt het, dat het grote aantal auteurs zoveel fouten heeft laten zitten, dat een verbeterblad van drie bladzijden als inlegvel nodig was? En nog is niet alles er uitgehaald. Storende fouten staan nog op (45) in de figuur, op (68), $4 \times 1{,}3 = 5{,}2\ cm^2$ en op (73), waar een onvolledig blokschema staat.
Ik heb aardige denkbeelden aangetroffen, maar ze verdwijnen helaas in de zee van overbodigheden, zoals het modeverschijnsel van 'leuke' tekeningen. Vooral in het begin van dit boek ben ik onaangenaam getroffen door de meer dan domme houding van kinderen en zelfs volwassenen, die nog met uit de aard der zaak niet gestandaardiseerde handbreedten meten en daarover ook nog een serieuze correspondentie voeren! Als de auteurs dit bedoeld hebben als een verwijt aan de lagere klassen van de basisscholen, dan sta ik achter ze, maar hier is het niet op zijn plaats. Waarom tweeden in plaats van halven? (14) En wist U, lezer (en musicus?) wat een kwint is? 18° De consequentie zou zijn dat een terts = 30° en een seconde = 45°. En wie schrijft er nu 2,5 gulden?? Mijn hoofdbezwaar is, dat dit boek niet practisch is, o.a. omdat tal van opdrachten onduidelijk zijn. Wat is een klassemaat? Is een cirkel een lijn of een vlakdeel? (38)
Wat de kosten betreft is het ook jammer, dat het boek slecht éénmaal gebruikt kan worden.
Toch kan ik er ook weer enige sympathie voor voelen, en ik ben graag bereid de auteurs eens wat meer gedetailleerde wensen kenbaar te maken.

J. K. Timmer

Dr. C. L. Scheffer, *Kansrekening, maatschappij en wiskunde*, Delftse Universitaire Pers, *f* 5,–.

Inaugurele rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van gewoon hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde aan de onderafdeling der Wiskunde van de Technische Hogeschool te Delft op woensdag 28 mei 1975.
Dr. Scheffer gaat in deze rede in op het image, dat de waarschijnlijkheidsrekening buiten haar eigenlijke beoefenaren nog steeds in meerdere of mindere mate bezit. Met een overvloed van voorbeelden maakt hij aannemelijk, dat de tegenstelling tussen kansrekening en zuivere wiskunde een kwestie van smaak is. Voor iedere wiskundige acht hij een zekere kennis van kansrekening noodzakelijk.
Een boeiend betoog.

W. Kleijne

S. Brandt, *Datenanalyse* Mit statistischen Methoden und Computerprogrammen. B.I.-Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich (1975) 342 blz., D.M. 54,–.

Het boek is geschreven vanuit het standpunt van de gebruiker van de Wiskundige Statistiek. Het is bedoeld voor al diegenen (niet-wiskundigen), die met het verwerken van meetresultaten te maken hebben. De wiskundige strengheid wordt dan ook niet al te zeer benadrukt. Met uitzondering van kennis der differentiaal- en integraalrekening wordt verder nauwelijks wiskundige voorkennis verondersteld.
Om echter niet slechts een receptenboek voor een aantal praktische toepassingen te geven wordt getracht de begrippen en principes van de statistische methoden te verklaren en met voorbeelden toe te lichten.
Na een behandeling van de elementaire kansrekening komen o.a. de volgende onderwerpen aan de orde: steekproeven, toetsen van hypothesen, kleinste kwadratenmethode, variantie analyse en lineaire regressie.
In de tekst zijn een aantal computerprogramma's in Fortran opgenomen. Het laatste gedeelte van het boek (appendices) wordt o.a. gebruikt voor korte inleidingen in de programmeertaal Fortran en in de lineaire algebra, terwijl ook het statistisch formularium en statistische tabellen zijn opgenomen. Het is jammer dat de tekst geen opgaven bevat waaraan de lezer zijn opgedane kennis zou kunnen toetsen.

J. van Nunen.

E. Pflaumann und H. Unger, *Funktionalanalysis II*, Bibliographisches Institut Mannheim, Wissenschaftsverlag, 1974, 338 bl., DM 24.

In het tweede deel van dit leerboek over functionaalanalyse komen eerst aan de orde de theorie der uniforme structuren, de stelling van de gesloten grafiek en de stelling van Banach-Steinhaus, de Fréchet afgeleide en de Gâteaux differentiaal. Deze inleiding bevat drie hoofdstukken en neemt 103 bladzijden in beslag. Het overblijvende gedeelte is geheel gewijd aan de spectraaltheorie in Banach algebra's, in het bijzonder de spectraaltheorie voor operatoren (compacte operatoren, normale en Hermitische operatoren in een Hilbert ruimte, ook iets over onbegrensde operatoren). De opbouw, vooral in de inleidende hoofdstukken, steunt geheel op de theorie der topologische vectorruimten; vergaande algemeenheid wordt daarbij niet geschuwd. Voorbeelden en tegenvoorbeelden ontbreken vrijwel geheel, waardoor het aan de lezer niet duidelijk zal worden wat dit alles te maken heeft met problemen uit de klassieke analyse. Dit is jammer en doet enigszins vreemd aan, zeker bij auteurs die aan een instituut voor toegepaste wiskunde werkzaam zijn. De uitvoering van het boek is met slappe kaft; de druktechnische verzorging is zeer goed.

A. C. Zaanen

Chr. Pommerenke, *Univalent Functions* (Studia Mathematica, Band 25), Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1975, 376 bl., D.M. 88,–.

De schrijver van dit boek, die verbonden is geweest aan het Imperial College in Londen en die thans doceert aan de Technische Univeriteit te Berlijn, is een bekend deskundige op het gebied van de eenwaardige analytische functies ('univalent' in het Engels, 'schlicht' in het Duits). Dankzij de afbeeldingsstelling van Riemann kan men zich beperken tot eenwaardige functies in de (open) eenheidscirkel, d.w.z. men bestudeert machtreeksen

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots (|z| < 1),$$

die de eigenschap hebben dat uit $z_1 \neq z_2$ ook $f(z_1) \neq f(z_2)$ volgt. Over dit onderwerp bestaat een ontzagwekkende hoeveelheid literatuur. In 1916 bewees L. Bieberbach, dat voor zo'n $f(z)$ de schatting $|a_2| \leqq 2$ geldt en hij sprak het vermoeden uit dat $|a_n| \leqq n$ geldt voor alle $n \geqq 2$. Dit vermoeden is tot nu toe bewezen tot en met $n = 6$; de bewijzen voor $n = 5$ en $n = 6$ beslaan zoveel ruimte dat ze niet in dit boek opgenomen zijn. Al ziet dit er niet erg bemoedigend uit, toch is men in zekere zin niet ver van het gewenste resultaat af. Na de beroemde schatting $|a_n| < en$ voor alle n (met $e = 2.7..$) van J. E. Littlewood uit 1925 is men nu gevorderd tot $|a_n| < (7/6)^{1/2}\, n < 1.081\, n$ van C. H. FitzGerald (1972). Bovendien is door W. K. Hayman (1955) bewezen dat lim sup $|a_n|/n \leqq 1$. Voor bepaalde deelverzamelingen van de verzameling der bovengenoemde eenwaardige functies is meer bekend, bijv. als $f(z)$ oneven is (d.w.z. $f(z) = -f(-z)$, dus $a_2 = a_4 = \dots = 0$) of als alle coefficiënten van $f(z)$ reëel zijn. Aan deze en daarmee samenhangende problemen is meer dan de helft van het boek gewijd. In de latere hoofdstukken wordt ook het randgedrag van f en de afgeleide f' besproken (d.w.z. het gedrag voor $|z| \to 1$). Het geheel wordt besloten met een uitvoerige literatuurlijst. Volgens het voorbericht is de stof in het standaardleerboek van Ahlfors over complexe functies voldoende voorkennis voor vrijwel de gehele inhoud van dit boek.

A. C. Zaanen

Bladvulling

Leraar: Denk nu eens rustig na, dan kan je het best.

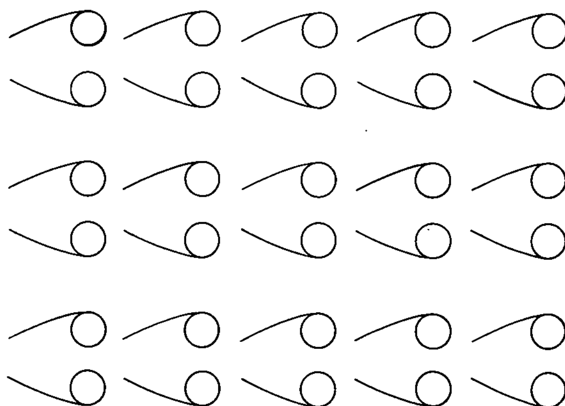
Leerling: Waarom moet ik eigenlijk wiskunde doen?

Leraar: Om te leren denken.

Recreatie

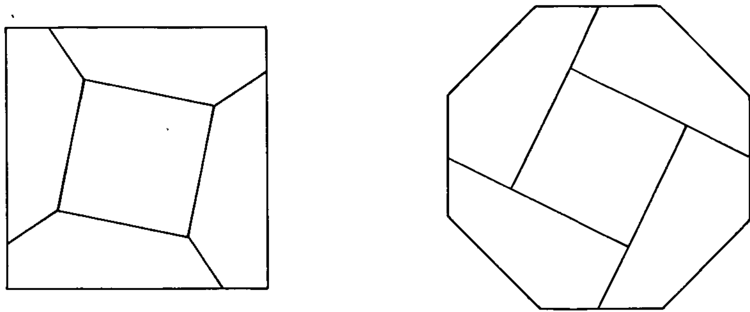
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

Opgave e. In de oplossing van opgave d zijn 7 isometrieën gevonden die ten grondslag liggen aan de herhaling van patronen op randen behangselpapier.
Men kan het probleem uitbreiden tot twee dimensies. Hoeveel isometrieën liggen ten grondslag aan de herhaling van patronen op behangselpapier? Geen eenvoudig probleem. In Caldwell, Topics in Recreational Mathematics vindt men de oplossing op blz. 124–128. Er blijken 27 isometrieën te zijn. We stellen liever een eenvoudiger probleem. Men kan twee isometrieën kiezen I_1 en I_2. Volgens I_1 herhaalt men het patroon in horizontale richting en volgens I_2 in verticale. Samenstelling van beide isometrieën geeft dan een vlakvulling.
Zo geeft bijv. horizontaal T$\underline{S}$ en verticaal TS| de volgende vlakvulling:

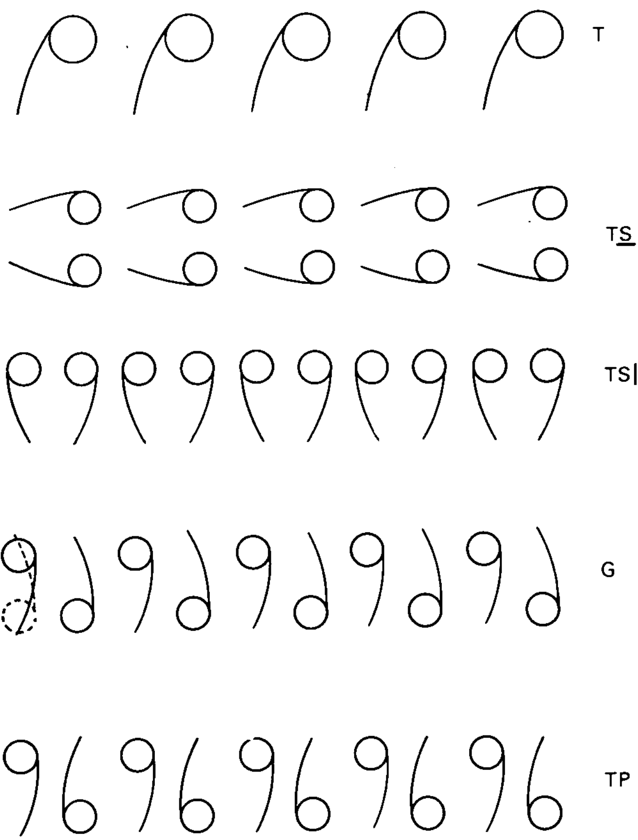


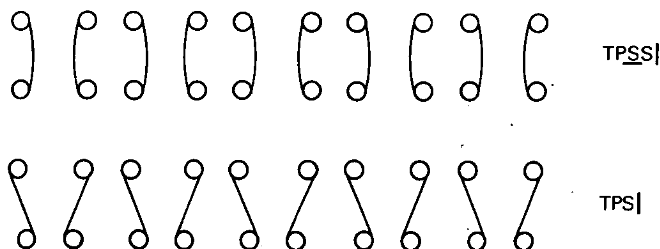
Hoeveel verschillende typen vlakvulling zijn op deze wijze mogelijk?
We maken geen principieel verschil tussen horizontaal en verticaal. Horizontaal T$\underline{S}$ en verticaal TS| rekenen we dus niet verschillend van horizontaal TS| en verticaal T$\underline{S}$.

Oplossing c. Gevraagd werd een vierkant in vijf delen te verdelen zo, dat ze tot een regelmatige achthoek aaneengelegd kunnen worden.
De oplossing ziet men in onderstaande figuur.



Oplossing d. Gevraagd werd de isometrieën op te sporen die ten grondslag liggen aan randen behangselpapier waarop een grondpatroon zich steeds weer herhaalt.
Er zijn zeven verschillende isometrieën. In de onderstaande figuur ziet men ze onder elkaar afgebeeld.





De figuren van de bovenste rand ontstaan uit een grondfiguur door herhaald uitvoeren van een translatie. We noemen dit type daarom T.
Tweede rand: translatie en spiegeling om een horizontale as. Type TS
Derde rand: translatie en spiegeling om een verticale as. Type TS
Vierde rand: glijspiegeling. Type G.
Vijfde rand: translatie en puntspiegeling. Type TP.
Zesde rand: translatie, puntspiegeling en spiegeling om een verticale as die door het centrum van de puntspiegeling gaat. Dientengevolge ook horizontale symmetrieas aanwezig. Type TPSS|.
Zevende rand: translatie, puntspiegeling en spiegeling om een verticale as die niet door het centrum van de puntspiegeling gaat. Type TPS|.

Een sluitend bewijs dat geen andere typen mogelijk zijn vindt men in Cadwell, Topics in Recreational Mathematics, blz. 120–121.

INHOUD